DOI: 10.24888/2500-1957-2025-2-53-70

УДК 372.851

РАЗВИТИЕ КРЕАТИВНОСТИ СТУДЕНТОВ В ИССЛЕДОВАНИИ МНОГОЭТАПНЫХ МАТЕМАТИКО-ИНФОРМАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ ПО ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Секованов Валерий Сергеевич
д.п.н., профессор
sekovanovvs@yandex.ru
г. Кострома
Костромской государственный университет

Смирнов Евгений Иванович
д.п.н., профессор
smiei@mail.ru
г. Ярославль, г. Владикавказ
Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, Южный математический институт Владикавказский научный центр

Секованова Любовь Афанасьевна
д.т.н., профессор
sekovla@yandex.ru
г. Кострома
Костромская государственная сельскохозяйственная академия

Щепин Роман Александрович
преподаватель
kurlikchelovek@gmail.com
г. Кострома
Костромской государственный университет

Аннотация. Исследование элементов фрактальной геометрии в обучении студентов рассматривается с эффектом развития креативности обучающихся в «проблемной зоне» профессиональной подготовки. Циклы, множества Жюлиа и Диски Зигеля исследуются в форме выполнения малыми группами студентов многоэтапных математико-информационных заданий средствами математического и компьютерного моделирования. Цель исследования: развитие креативности студентов в процессе исследования сложных разделов современной математики средствами математического и компьютерного моделирования. Методы исследования: наглядное моделирование сложных систем и знаний, фундирование опыта личности, компьютерное моделирование средствами MathCad и GeoGebra, голоморфная динамика, геометрия аттракторов и неподвижных точек в исследовании фракталов. Результаты исследования: этапы исследовательской деятельности в контексте роста креативности студентов, модели и компьютерные программы построения новых множеств Жюлиа и дисков Зигеля для полиномов второй степени, вариации и структура неподвижных точек голоморфной функции.

Ключевые слова: креативность, математическое и компьютерное моделирование, заполняющее множество Жюлиа, диск Зигеля, фрактальная геометрия

Введение

Современный мир и социум всё более нуждается в креативных личностях, способных адаптироваться к стохастичности и непредсказуемости событийного поля, управлять сложными процессами и интерпретировать современные технологии для решения насущных практико-ориентированных задач. Возрастает наукоемкость производств и значимость личностных преференций как в решении эффективности производительных сил, так в профессиональном образовании. Настоящая статья посвящена формированию и развитию креативности студентов при изучении сложных систем и знаний на основе симбиоза математического и компьютерного моделирования в рамках исполнения многоэтапных математико-информационных заданий (ММИЗ) (на примере исследовательской темы голоморфной динамики «Циклы, множества Жюлиа и диски Зигеля») (Милнор, 2000; Секованов, 2019; Секованов, 2021-а; Секованов, 2016-а; Секованов, 2024; Dvoryatkina, 2023; Smirnov, 2025). Вопросам развития креативности личности и особенностям использования многоэтапных математико-информационных заданий посвящены многочисленные работы, среди которых укажем (Рыбина, 2018; Балакина, 2024; Салов, 2011; Ивков, 2018; Smirnov, 2020; Дворяткина, 2021).

Голоморфная динамика в настоящее время интенсивно развивается и находит многочисленные приложения. Данная дисциплина тесно связана с новыми ветвями современной математики фрактальной геометрией и теорией хаоса. Важной составляющей голоморфной динамики являются множества Жюлиа (Пайген, 1993; Секованов, 2021б; Скорнякова, 2025). Так, например, на каждом своём множестве Жюлиа квадратичная функция хаотична, а множество Жюлиа, как правило, имеет фрактальную структуру. Отметим, что множества Жюлиа имеют сложнейшую математическую структуру и построить их модели без использования компьютера невозможно. Отметим также, что множества Жюлиа связаны с другими математическими объектами, такими как, например, диск Зигеля. Диск Зигеля появляется в случае, когда его неподвижная точка будет иррационально-нейтральной, что отличает её от параболической нейтральной точки. Перечисленные выше свойства множеств Жюлиа открывают широкий спектр возможностей для развития креативности и творчества студентов. Практически всю информацию студенты получают впервые, что создает благоприятные условия для выработки такого важнейшего креативного качества, как толерантность к новизне и развития интуиции. Как уже отмечалось, при выполнении указанного ММИЗ студенты имеют возможность познакомиться с интересными математическими объектами, как, например, диски Зигеля, и создать с помощью множеств Жюлиа художественные композиции.

Методология и методы

Многоэтапные математико-информационные задания являются основным средством исследования элементов фрактальной геометрии математическими и компьютерными методами и естественной лабораторией формирования и развития креативности студентов. Весомый вклад в создание и совершенствование этого эффективного инструмента организации поисковой и исследовательской деятельности внесли М. Клякля, В.С. Секованов, Е.И. Смирнов и др. При их выполнении, кроме перечисленных выше креативных качеств, у студента развиваются гибкость мышления, вырабатывается умение прогнозировать процесс исследования, получать побочные результаты математической деятельности, что позитивно влияет на развитие креативности обучающихся. Отметим, что система параметров элементов формирования и развития креативного потенциала и качества исследовательской деятельности студентов состоит из трёх взаимосвязанных компонентов: научного мышления, научной деятельности и научного общения (Смирнов, 2012). Актуализация этих компонентов эффективно проявляется при исследовании современных достижений в науке как комплексов сложных систем и знаний (элементы фрактальной геометрии, теории кодирования и шифрования информации, цилиндр и конус Шварца, нечёткие множества и fuzzy logic, обобщённые функции, клеточные автоматы и т.п.) (Дворяткина, 2016; Осташков, 2016). Нелинейный анализ синергетических эффектов самоорганизации в живой и неживой природе приводят к выводу, что нарастание сложности в открытых и неравновесных системах не является деструктивным механизмом, а наоборот является необходимым переходом к новому уровню развития, более сложным и упорядоченным формам организации, в том числе в формировании и развитии креативности мышления обучающихся (Ст. Бир, Н. Винер, Дж. фон Нейман, Г. Хакен, А.Н. Леонтьев и др.). Учёные показали, что эффективное развитие личности происходит при освоении сложного знания (разных уровней его сложности в зависимости от личностного развития обучающихся, создания ситуаций преодоления трудностей в процессе освоения знаний и единой картины мира. Как отмечал французский философ Э. Морен, «в познании сложного сам процесс познания «становится коммуникацией, петлёй между познанием (феноменом, объектом) и познанием этого познания» (Morin, 2005). Базовым конструктом адаптации современных достижений в науке (в настоящей статье, элементы фрактальной геометрии) является категория фундирования опыта и качеств личности (Э. Гуссерль, М. Хайдегер, В.Д. Шадриков, Е.И. Смирнов и др.). Феномен фундирования понимается как процесс создания конструктов, схем и условий для поэтапного углубления и расширения предметного содержания и когнитивных связей мышления в направлении формирования и проявления сущности как обобщённой структуры научных знаний и когнитивных схем креативного мышления. Е.И. Смирнов (Смирнов, 2012) рассматривает так называемые спирали и кластеры фундирования как целостные интегрирующие механизмы реализации преемственности содержания этапов становления креативных качеств личности в ходе исследования обобщённых конструктов сложных систем и знаний. Фундирующие процедуры перехода от наличного состояния сущности феномена креативности (или обобщённого конструкта знания) и её актуального представления к обобщённому потенциальному развитию в форме идеального объекта состояния личностных качеств являются многоэтапными, полифункциональными, направленными и интегративными по актуализации внутри и межпредметных связей (рис. 1).

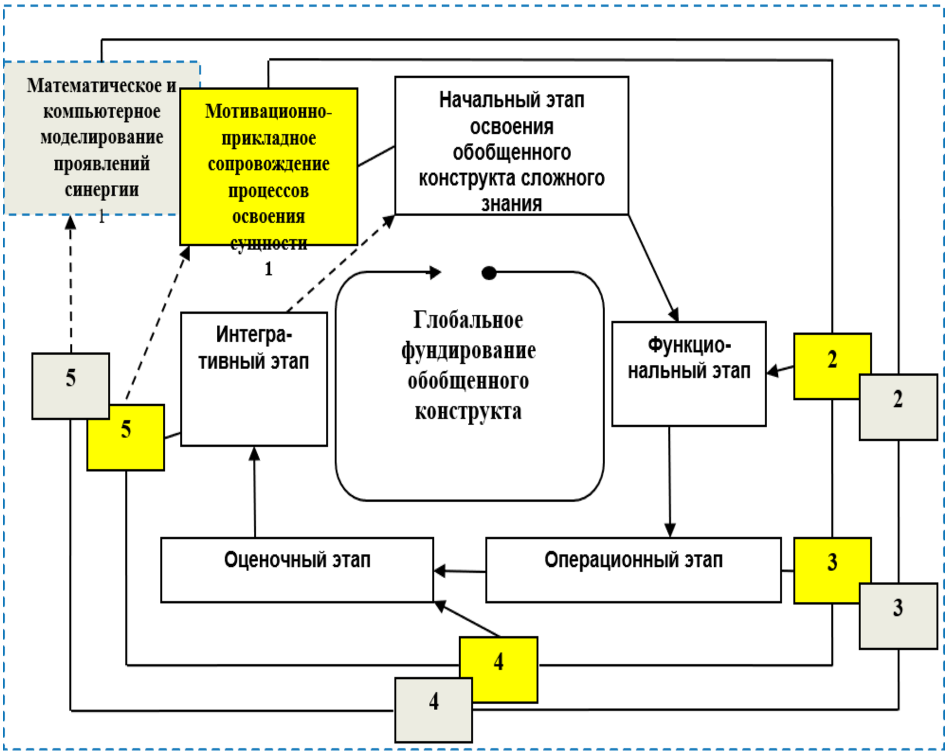


Рис.1. Кластер фундирования обобщенного конструкта знания (качества личности)

Результаты

Итерациям полиномов второй степени на вещественной и комплексной плоскостях посвящены многочисленные работы и введены новые понятия. Так, например, в результате итерирования полиномов второй степени вещественной переменной появились важнейшие понятия «Динамика Ферхюльста», «Константа Фейгенбаума» (Секованов, 2016б). При исследовании итераций семейства полиномов второй степени на комплексной плоскости появились знаменитые множества – множество Мандельброта и множества Жюлиа. В настоящее время множества Жюлиа и множества Мандельброта используются в качестве математических моделей в физике, экономике и других дисциплинах. Важно подчеркнуть, что, выполняя данное ММИЗ «Циклы, множества Жюлиа и диски Зигеля», студенты вырабатывают такие важные креативные качества, как толерантность к новизне, гибкость мышления, интуиция. Кроме того, при выполнении данного ММИЗ при решении задач они применяют математические методы и компьютерные программы, что повышает интерес студентов как к математике, так и к информатике (рис. 2).

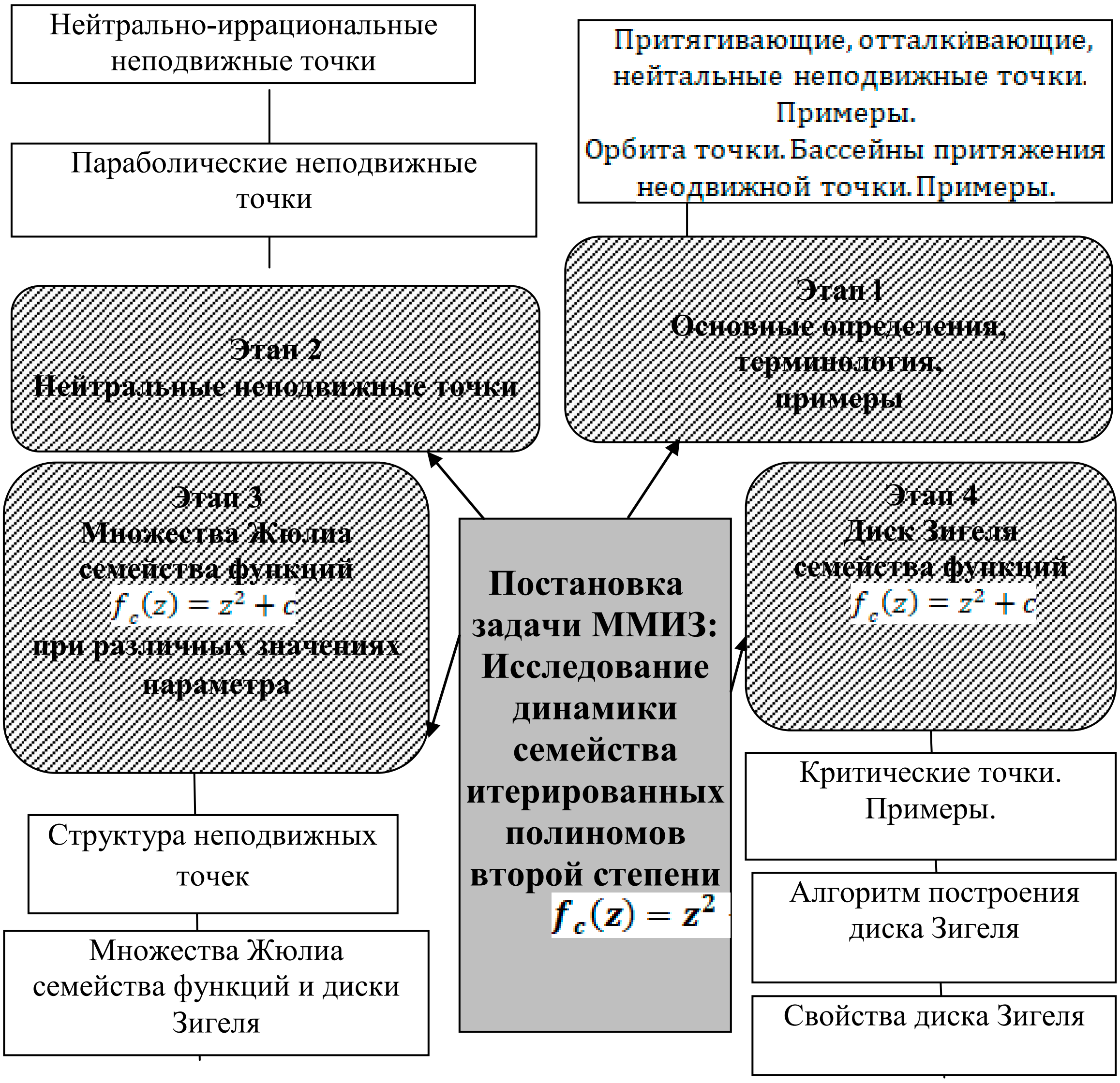


Рис 2. Схема-план ММИЗ «Циклы, множества Жюлиа и диски Зигеля»

Этап 1. Подготовительный (выбор заданий, эталоны и образцы исследовательской деятельности; основные определения, терминология; примеры)

Креативность (самоактуализация («мне это интересно») проявляется в выраженности ценностных и личностно-адаптационных характеристик познавательной деятельности обучаемых по освоению эталонов и образцов феноменологии наглядного моделирования обобщённого конструкта и результатов диагностических процедур на: осознание значимости и учёт ценностных ориентиров, гибкость выбора способов деятельности по раскрытию отдельного качества проявления обобщённой сущности (содержательного или процессуального компонента обобщённого конструкта); поиск и анализ выявления этапов научного познания, методов исследования и механизмов осуществления внутрипредметных и межпредметных связей; настрой личности на самоопределение и самоорганизацию, освоение принципов и стилей научного мышления: индукции, дедукции, инсайта, аналогии, инверсии и антиципации.

Напомним, что точка z_0 называется неподвижной, если $f(z_0) = z_0$. Если же $f^{(n)}(z_0) = z_0$ ($n > 1$), то точку z_0 мы назовём периодической точкой. Такое наименьшее n, при котором $f^{(n)}(z_0) = z_0$, называется периодом z_0.

Если

$$|\lambda| > 1$$
$$(|\lambda| = 1, |\lambda| < 1),$$

то точка z называется отталкивающей (соответственно нейтральной, притягивающей), где

$$\lambda = \left(f^{(n)}(z)\right)'.$$

Например, функция

$$f(z) = z^2 - 2$$

имеет две неподвижные отталкивающие точки

$$z_1 = 2, \quad z_2 = -1,$$

вторая итерация данной функции

$$f^{(2)}(z) = z^4 - 4z^2 + 2$$

имеет неподвижные отталкивающие точки

$$z_1 = 2 \text{ и } z_2 = -1,$$
$$z_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ и } z_4 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

что подтверждается использованием Mathcad-программы.

Функция

$$f(z) = z^2 + \frac{1}{4}$$

будет иметь неподвижную нейтральную точку $z = 0{,}5$, поскольку

$$|f(z)| = 1.$$

Под орбитой точки z мы будем понимать последовательность

$$\{z, f(z), f^{(2)}(z), f^{(3)}(z), \dots, f^{(n)}(z), \dots\}.$$

Пусть $f(z) = z^2$. Орбитой точки данной функции будет последовательность

$$\{z, z^2, \dots z^{2^n}, \dots\}.$$

Здесь студентам полезно провести подробные вычисления без использования компьютера. Пусть z_0 – притягивающая неподвижная точка функции f.

Множество

$$A(z_0) = \{z \in C : f^{(n)}(z) \to z_0, n \to \infty\}$$

будем называть бассейном (областью) притяжения точки z_0.

Пусть опять $f(z) = z^4$.

Поскольку

$$f^{(n)}(z) = z^{4^n},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left(f^{(n)}(z)\right) = \infty$$

при $|z| > 1$ и ограничены

$$\lim_{n\to\infty}\left(f^{(n)}(z)\right) = 0.$$

При $|z| < 1$, то две неподвижные точки

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \infty$$

имеют два бассейна притяжения: внутренность круга единичного радиуса с центром в начале координат (точка z_1); внешность круга радиуса единица с центром в начале координат (точка z_2). Пусть мы имеем заполняющее множество Жюлиа, то есть множество, состоящее из точек, орбиты которых ограничены:

1) отметим, что если точка z находится внутри заполняющего множества Жюлиа, то её орбита будет стремиться к неподвижной притягивающей точке;

2) если точка z находится вне заполняющего множества Жюлиа, то ее орбита будет стремиться к бесконечности;

3) если точка z находится на границе заполняющегося множества Жюлиа, которая представляет множество Жюлиа, то её орбита будет хаотично перемещаться по данному множеству.

Исследование заданий и их выбор могут реализовываться в малых группах при организации педагогической и компьютерной поддержки в дисплейном классе.

Этап 2. Эмпирический (реализации эмпирических проб и проектировании наглядных моделей фундирующих процедур представления частных проявлений сущности обобщённого конструкта)

Расширение креативных действий (самоопределение («что я могу сделать») на основе познавательной самостоятельности и актуализации нестандартных решений, компетенций и характеристик личностных качеств. Реализация процесса выявления существенных связей и преемственности эмпирических обобщений, осознание функциональности уровня математического содержания проявления сущности обобщённого конструкта и коррекции состояния его параметров и условий, адекватности и эффективности соотнесения направленности «цель-результат».

Определение. Пусть дана голоморфная функция $f(z)$. Будем считать, что данная функция имеет иррационально-нейтральную неподвижную точку z если

$$f'(z) = e^{2\pi i\alpha},$$

где α число иррациональное. Если же число α – число рациональное, то точку z будем называть нейтрально-рациональной неподвижной (параболической) точкой. Выявим сначала множество A, содержащее такие точки c, что функция

$$f_c(z) = z^2 + c$$

имеет неподвижную нейтральную точку. Пусть z есть притягивающая неподвижная точка. Тогда выполняются два условия:

1) $f_c(z) = z^2 + c = \mathrm{z}$; 2) $\left|f_c'(z)\right| = |2z| < 1$.

Из условия 2 следует, что точки границы удовлетворяют соотношению

$$2|z| = 1.$$

Или же

$$|z| = \frac{1}{2}.$$

Тогда переменную z можно записать в виде

$$z = \frac{1}{2}e^{it} \ (*),$$

где $t \in [0;\, 2\pi]$.

Учитывая условия 1, (*) и то, что $z^2 = \dfrac{e^{i2t}}{4}$, получим выражение

$$c = \frac{1}{2}e^{it} - \frac{1}{4}e^{2it} = \frac{1}{2}\left(e^{it} - \frac{e^{2it}}{p}\right),$$

где $t \in [0;\, 2\pi]$.

Положим $c = c_1 + ic_2$, из уравнения получим параметрическое уравнение линии:

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2}\left(\cos t - \dfrac{\cos 2t}{2}\right) \\ c_2 = \dfrac{1}{2}\left(\sin t - \dfrac{\sin 2t}{2}\right) \end{cases}, \text{ где } t \in [0; 2\pi].$$

Построим в пакете MathCad кривую, заданную уравнением

$$c = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta} \text{ (рис. 3).}$$

Используем следующий алгоритм:

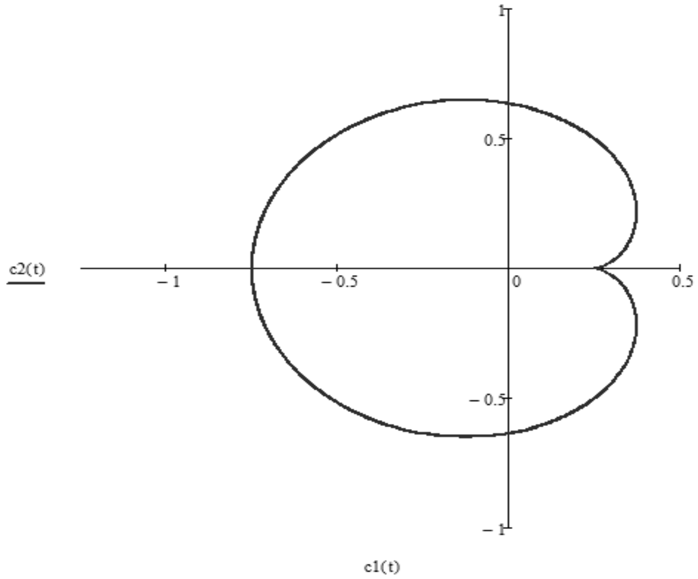


Рис. 3. Множество A генераторов неподвижных точек

а) записываем параметрические уравнения нашей линии и выводим на экран панель построения;

$$c1(t) = \frac{\cos t}{2} - \frac{\cos 2t}{4},\ c2(t) = \frac{\sin t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}.$$

б) вписываем в средний маркер по оси абсцисс название аргумента по оси ординат – название функции.

Получаем множество A, представляющее кардиоиду (рис. 3). Нетрудно заметить, что если точка *c* принадлежит кардиоиде, то у функции

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

по крайней мере, одна неподвижная точка будет нейтральной. Причем данные точки могут быть как рационально-нейтральными, так и иррационально-нейтральными точками.

Здесь студентам полезно доказать, что полученное множество *A,* действительно, является кардиоидой.

Этап 3. Процессуально-деятельностный (выявление структуры неподвижных точек)

Креативность студентов (самоорганизация («я способен управлять процессом») проявляется в проектировании и организации технологии освоения обучаемыми исследовательских процедур освоения инновационных проявлений сущности обобщённого конструкта в ходе развёртывания её фундирующих этапов и на основе актуализации приёмов творческой познавательной самодеятельности и диалога математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур.

Будем считать, что функция $f(z)$ имеет две неподвижные притягивающие точки и писать (***P P***) (соответственно одну неподвижную притягивающую точку и одну неподвижную нейтральную точку и писать (***P N***)).

Аналогично определяются случаи: (***P O***), (***N N***), (***N O***), (***O O***). Однако нейтральные неподвижные точки ведут себя в ряде случаев по-разному, что, на наш взгляд, важно для понимания студентами динамики итерирования семейства функций. При выполнении данного ММИЗ мы будем большее внимание уделять иррационально-нейтральным неподвижным точкам, связанными с дисками Зигеля. В данной работе мы выделяем качественные отличия орбит точек, расположенных в достаточно малых окрестностях иррационально-нейтральных и параболических неподвижных точек. Под структурой неподвижных точек семейства функций мы будем понимать пары, компонентами которых являются притягивающие, нейтральные и отталкивающие точки при конкретных значениях параметра c. Структура неподвижных точек и орбиты нескольких точек функции

$$f_c(z) = z^2 + c$$

отражена в таблице 1. Отметим, что в данной таблице отражено как наличие нейтрально-рациональных неподвижных точек, так и нейтрально-иррациональных неподвижных точек. Не остались в стороне и исследования характера притягивающих и отталкивающих неподвижных точек. Заметим, что некоторые орбиты точек, стремящихся к неподвижным точкам (притягивающим и нейтральным), имеют свои особенности. Приведём в таблице 1, структуру неподвижных точек семейства полиномов

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

акцентируя внимание на циклы и иррационально-нейтральные неподвижные точки, порождающие диски Зигеля. Заметим, что, если

$$c = -0{,}1 - 0{,}2i,$$

то мы получим притягивающий цикл периода 1 (см. пункт 1а), в таблице 1). В данном случае одна неподвижная точка притягивающая – вторая отталкивающая.

Если

$$c = -0{,}481762 - 0{,}53165i,$$

то мы получим притягивающий цикл периода 5 (см пункт 2б), в таблице 1). В случаях 4в) – 4е) одна неподвижная точка становится иррационально-нейтральной, и появляются диски Зигеля.

Так, например, если

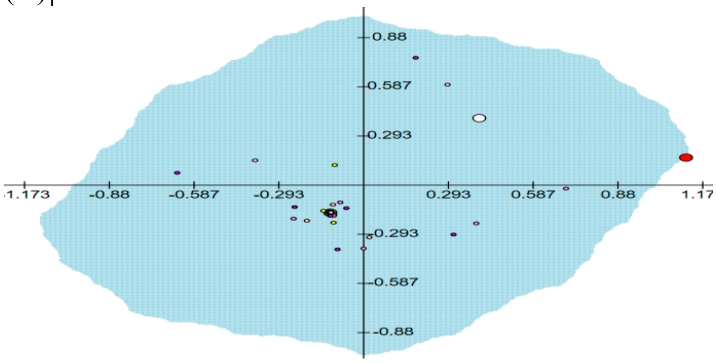
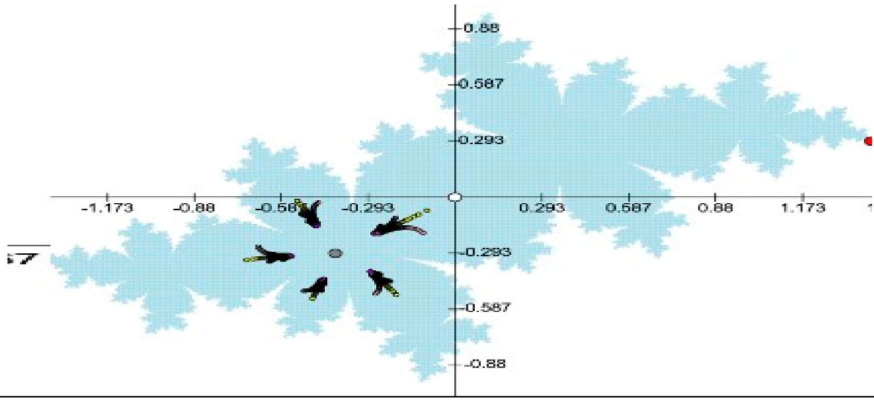
$$t = -3{,}8787,$$

то

$$c = -0{,}3943 + 0{,}5849i,$$

то мы получим диск Зигеля (пункт 4в) таблицы 1. Здесь орбиты точек, будут вращаться по окружностям, охватывающим нейтральную неподвижную точку, образуя в совокупности диск Зигеля. Студенты должны провести подробный анализ пунктов 4в) – 4е), включая использование математических методов и программирование. Отметим, что во всех случаях наши выводы подтверждаются выполнением компьютерных программ. Отсутствие случаев (***P P***) и (***P N***) (в таблице 1 пункты (3 – 4)) студентам полезно доказать самостоятельно. Полезно предложить студентам провести подробный анализ случаев (***N N***) и (***O O***) (пункты 5 и 6) таблицы 1. Кроме того, в пункте 6) студентам предлагается доказать, что заполняющим множеством Жюлиа будет отрезок [–2; 2].

Таблица 1

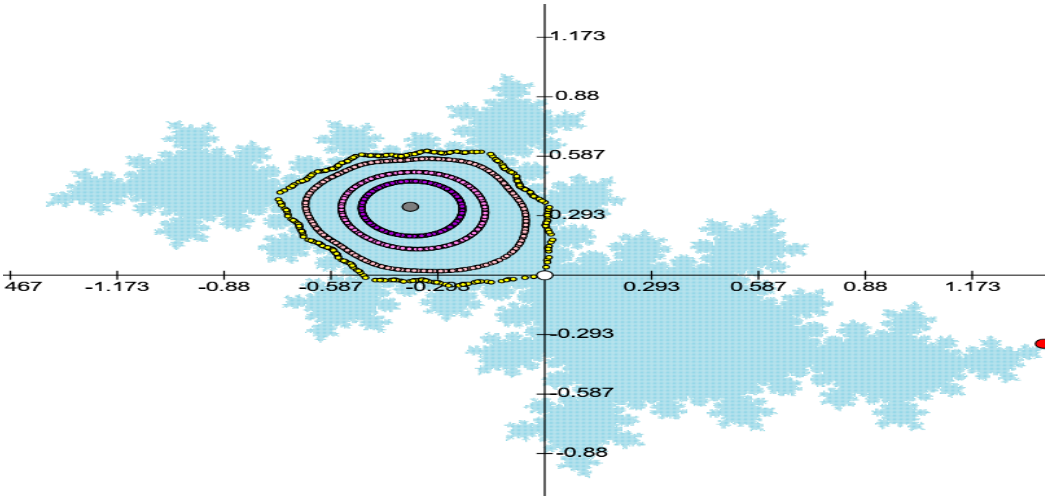
№	z_1	z_2	Семейство функций: $f_c(z) = z^2 + c$
1	P	O	а) $c = -0,1 - 0,2i$ $i := \sqrt{-1}$ $c := -0.1 - 0.2$ $\lvert c\rvert = 0.2236$ $l(x) := 2x$ $f(x) := x^2 - x + c$ $x := \frac{-i}{\sqrt[4]{5}}$ $x1 := \text{root}(f(x), x)$ $x1 = -0.1136 - 0.163i$ $l(x1) = -0.2273 - 0.3259i$ $\lvert l(x1)\rvert = 0.3973$ $\lvert l(x1)\rvert = 0.3973$ $\lvert l(x1)\rvert = 0.3973$ $x := 1 + 1\cdot i$ $\lvert x1\rvert = 0.1987$ $x2 := \text{root}\left(\frac{f(x)}{x - x1}, x\right)$ $x2 = 1.1136 + 0.163i$ $l(x2) = 2.2273 + 0.3259i$ $\lvert x2\rvert = 1.1255$ $\lvert l(x2)\rvert = 2.251$ 
2	N	O	б) $c = -0,481762 - 0,531656i$ $i := \sqrt{-1}$ $c := -0.481762 - 0.53165$ $\lvert c\rvert = 0.7175$ $l(x) := 2x$ $f(x) := x^2 - x + c$ $x := \frac{-i}{\sqrt[4]{5}}$ $x1 := \text{root}(f(x), x)$ $x1 = -0.4045 - 0.2939i$ $l(x1) = -0.809 - 0.5878i$ $\lvert l(x1)\rvert = 1$ $x := 1 + 1\cdot i$ $\lvert x1\rvert = 0.5$ $x2 := \text{root}\left(\frac{f(x)}{x - x1}, x\right)$ $x2 = 1.4045 + 0.2939i$ $x2 = 1.4045 + 0.2939i$ $l(x2) = 2.809 + 0.5878i$ $\lvert x2\rvert = 1.4349$ $\lvert l(x2)\rvert = 2.8699$ 
3	P	P	Ни при каком значении параметра c семейство функций $f_c(z) = z^2 + c$ не содержит двух притягивающих неподвижных точек
4	P	N	Ни при каком значении параметра c семейство функций $f_c(z) = z^2 + c$ не содержит одну притягивающую и одну нейтральную неподвижные точки
4	O	N	в) $c = -0,3943 + 0,5849i,$ $i := \sqrt{-1}$ $t := -3.878$ $z := \frac{e^{i\cdot t}}{2}$ $c := \frac{e^{i\cdot t}}{2} - \frac{e^{2\cdot i\cdot t}}{4}$ $\lvert c\rvert = 0.7054$ $c = -0.3943 + 0.5849i$

$f(x) := x^2 - x + c \quad x := \frac{-i}{\sqrt[4]{5}} \quad x1 := \mathrm{root}(f(x), x) \quad x1 = -0.3702 + 0.3361i \quad x := 1 + 1 \cdot i$

$l(x1) = -0.7404 + 0.6721i \quad x2 := \mathrm{root}\left(\frac{f(x)}{x - x1}, x\right) \quad x2 = 1.3702 - 0.3361i$

$l(x2) = 2.7404 - 0.6721i$

$|x2| = 1.4108 \quad |l(x2)| = 2.8216$



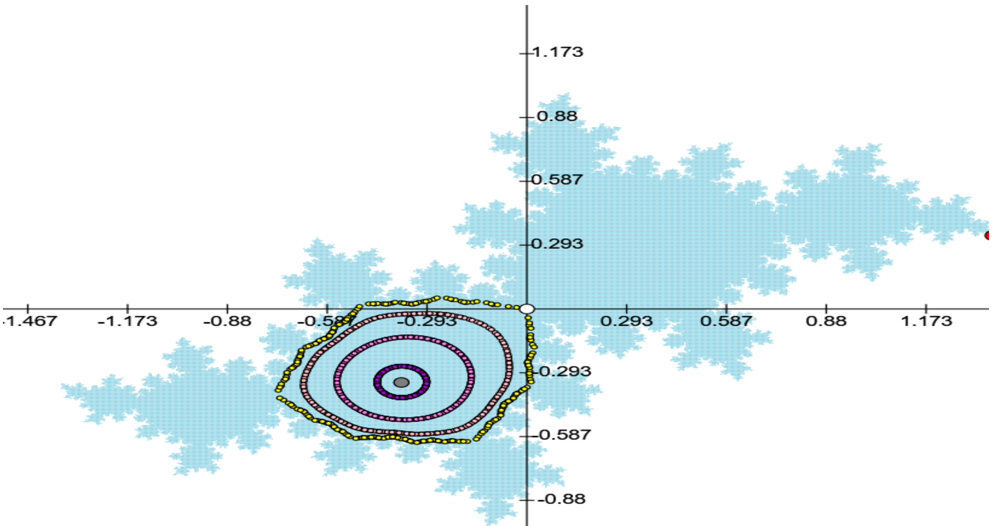
г) $c = -0,3943 + 0,5849i$,

$t := 3.878 \quad i := \sqrt{-1} \quad z := \frac{e^{i \cdot t}}{2} \quad c := \frac{e^{i \cdot t}}{2} - \frac{e^{2 \cdot i \cdot t}}{4} \quad |c| = 0.7054 \quad l(x) := 2x$

$c = -0.3943 - 0.5849i \quad f(x) := x^2 - x + c \quad x := \frac{-i}{\sqrt[4]{5}} \quad x1 := \mathrm{root}(f(x), x) \quad x1 = -0.3702 - 0.3361i$

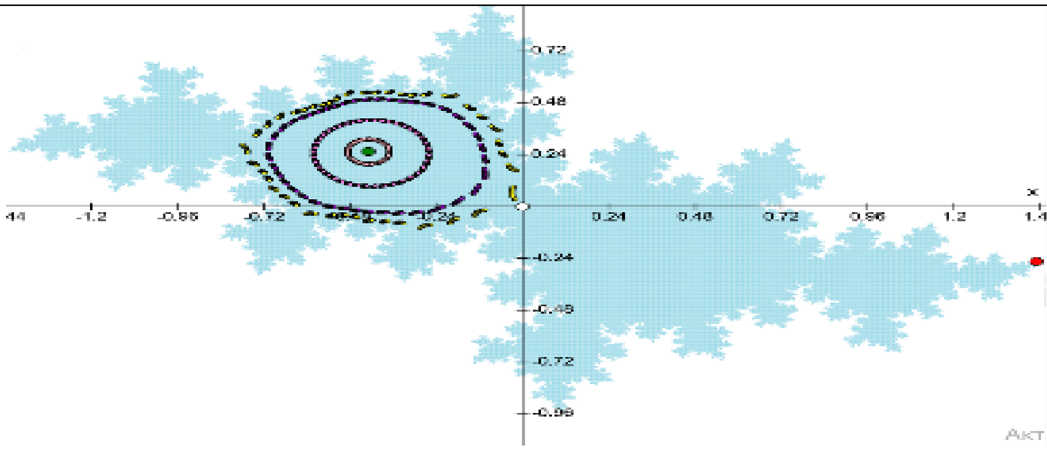
$x := 1 + 1 \cdot i \quad |x1| = 0.5 \quad l(x1) = -0.7404 - 0.6721i \quad x2 := \mathrm{root}\left(\frac{f(x)}{x - x1}, x\right) \quad |l(x1)| = 1$

$x2 = 1.3702 + 0.3361i \quad l(x2) = 2.7404 + 0.6721i \quad |x2| = 1.4108 \quad |l(x2)| = 2.8216$



z := (0, 0); z1 := (-0.1, -0.1); z2 := (-0.2, -0.2); z3 := (-0.4, -0.4);

д) $c = -0,5494 + 0,4749i$



$i := \sqrt{-1}$ $t := \sqrt{13} - 1$ $z := \frac{e^{i\cdot t}}{2}$ $c := \frac{e^{i\cdot t}}{2} - \frac{e^{2\cdot i\cdot t}}{4}$ $c = -0.5494 + 0.4749i$ $|c| = 0.7262$

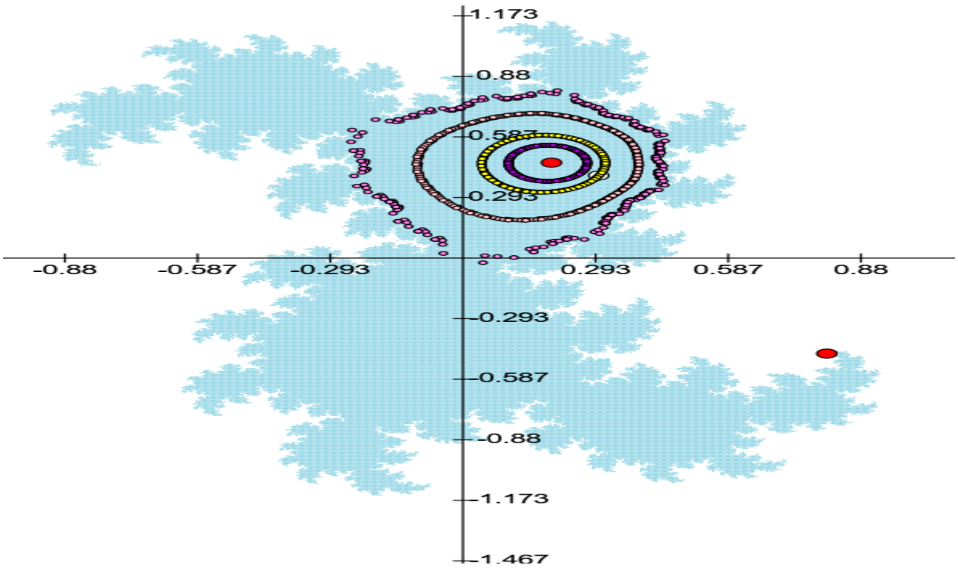
$l(x) := 2x$ $x := \frac{-i}{\sqrt[4]{5}}$ $x1 := root(f(x), x)$ $x1 = -0.4299 + 0.2554i$ $x := 1 + 1\cdot i$

$|x1| = 0.5$ $l(x1) = -0.8597 + 0.5107i$ $|l(x1)| = 1$ $x2 := root\left(\frac{f(x)}{x - x1}, x\right)$ $|x2| = 1.4525$

$x2 = 1.4299 - 0.2554i$ $l(x2) = 2.8597 - 0.5107i$ $|l(x2)| = 2.905$

```
z := (0, 0); z1 := (-0.45, 0.2); z2 := (-0.3, 0.35); z3 := (0.1, -0.2);
```

e) $c = -0,3688 + 0,2818i$



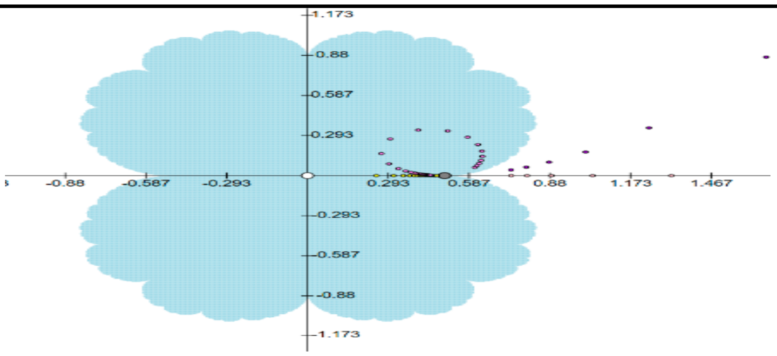
$i := \sqrt{-1}$ $t := 3.878$ $z := \frac{e^{i\cdot t}}{2}$ $c := \frac{e^{i\cdot t}}{2} - \frac{e^{2\cdot i\cdot t}}{4}$ $|c| = 0.7054$ $l(x) := 2x$ $c := 0.3688 + 0.2818$

$f(x) := x^2 - x + c$ $x := \frac{-i}{\sqrt[4]{5}}$ $x1 := root(f(x), x)$ $x1 = 0.8058 - 0.4608i$ $x := 1 + 1\cdot i$

$|x1| = 0.9282$ $l(x1) = 1.6116 - 0.9215i$ $|l(x1)| = 1.8565$ $x2 := root\left(\frac{f(x)}{x - x1}, x\right)$ $|x2| = 0.5$

$x2 = 0.1942 + 0.4608i$ $l(x2) = 0.3884 + 0.9215i$ $|l(x2)| = 1.0001$

```
z := (0.3, 0.4); z1 := (0.2, 0.2); z2 := (0, 0); z3 := (0.25, 0.4);
```

5	N	N	 $\boldsymbol{c = 0,25}$ $f_{0,25}(z) = z^2 + 0,25.$ Наличие случая (***N N***) установлено при выполнении этапа 1.
6	O	O	$\boldsymbol{c = -2}$ $f_{-2}(z) = z^2 - 2.$ Наличие случая (***O O***) установлено при выполнении этапа 1.

Этап 4. Обобщающе-преобразующий
(интерпретация результатов и анализ побочных продуктов)

Креативность как модус саморазвития личности («я могу сделать что-то новое»). Характеризуется: содержанием и характеристиками переноса инноваций в массовую практику освоения обобщённых конструктов современной математики; интеграцией индивидуального и социального в проектировании инновационных обобщающих конструктов; информационным обменом, социализацией и верификацией инновационной деятельности; характеристиками, параметрами и показателями становления и выраженности индивидуальных образовательных траекторий развёртывания личностных особенностей студентов.

Приведём алгоритм построения множества Жюлиа, диска Зигеля и циклов:

```
uses GraphWPF;
var
  C: Complex;
  M, picbox_width_div_2, picbox_height_div_2: integer;
function f(z: Complex): Complex;begin result := z * z + C; end;
procedure drawXY(d: integer; c: integer);
var dx, x1, y1, x2, y2: integer;dl, l: real; s: string;
begin
  Line(0, picbox_height_div_2, Window.Width, picbox_height_div_2);
  Line(picbox_width_div_2, 0, picbox_width_div_2, Window.Height);
  dx := picbox_width_div_2 div d;dl := dx / M; l := dl;x1 :=
picbox_width_div_2;
  x2 := x1; y1 := picbox_height_div_2 - 5;y2 :=
picbox_height_div_2 + 5;s := '';
  while x1 < Window.Width do
  begin
    s := Round(l, c).ToString();
    x1 := x1 + dx;Line(x1, y1, x1, y2);DrawText(x1 - 5, y2 + 5,
10, 5, s);
    Line(y1, x1, y2, x1);DrawText(y2 + 13, x1 - 4, 10, 5, '-' +
s);
    x2 := x2 - dx;Line(x2, y1, x2, y2);DrawText(x2 - 5, y2 + 5,
10, 5, '-' + s);
```

```
    Line(y1, x2, y2, x2);DrawText(y1 + 20, x2 - 4, 10, 5, s);l :=
l + dl;
  end;
  DrawText(Window.Width - 15, picbox_height_div_2 - 20, 10, 5,
'X');
  DrawText(picbox_width_div_2 - 20, 5, 10, 5, 'Y');
end;
procedure drawJulia;
var
  z: Complex;
begin
  for var x := 0 to picbox_width_div_2 do
    for var y := 0 to Window.Height.Trunc do
    begin
      z := ((x - picbox_width_div_2) / M, (picbox_height_div_2 -
y) / M);
      for var i := 1 to 100 do
        z := f(z);
      if (abs(z.Real) < 5) and (abs(z.Imaginary) < 5) then begin
        SetPixel(x, y, Colors.LightBlue);
 SetPixel(2 * picbox_width_div_2 - x, 2 * picbox_height_div_2 - y,
Colors.LightBlue);
      end;end;end;
procedure drawSpecPoint;
var  z: Complex;x, y: integer; abs_z: real;
begin
  z := (1 + sqrt(1 - 4 * C)) / 2; abs_z := round(abs(2 * z), 5);
  Brush.Color := abs_z < 1 ? Colors.Green : abs_z = 1 ?
Colors.Gray : Colors.Red;
  Circle(round(z.Real * M) + picbox_width_div_2,
picbox_height_div_2 - round(z.Imaginary * M), 5);
    z := (1 - z.Real, -z.Imaginary); abs_z := round(abs(2 * z),
5);
  Brush.Color := abs_z < 1 ? Colors.Green : abs_z = 1 ?
Colors.Gray : Colors.Red;
  Circle(round(z.Real * M) + picbox_width_div_2,
picbox_height_div_2 - round(z.Imaginary * M), 5);
end;
procedure drawIteration;
var
  z, z1, z2, z3: Complex;
begin
  z := (0, 0);z1 := (-0.3, 0.3);z2 := (-0.2, 0.4);z3 := (-
0.1,0.2);
  Brush.Color := Colors.White;
  Circle(z.Real * M + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 -
z.Imaginary * M, 5);
  for var i := 1 to 300 do
  begin
    Brush.Color := Colors.Yellow;
    z := f(z);
    Circle(z.Real * M + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 -
z.Imaginary * M, 2);
```

```
    Sleep(400);
    Brush.Color := Brushes.Pink.Color;
    z1 := f(z1);
    Circle(z1.Real * M + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 -
z1.Imaginary * M, 2);
    Sleep(400);
    Brush.Color := Brushes.Violet.Color;
    z2 := f(z2);
    Circle(z2.Real * M + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 -
z2.Imaginary * M, 2);
    Sleep(400);
    Brush.Color := Brushes.DarkViolet.Color;
    z3 := f(z3);
    Circle(z3.Real * M + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 -
z3.Imaginary * M, 2);
    Sleep(400); end;end;
begin Window.Height := 800;Window.Width :=
Window.Height;Window.CenterOnScreen;
  Window.Caption := 'Множество Жюлиа';
    picbox_height_div_2 := Window.Height.Trunc div 2;
  picbox_width_div_2 := Window.Width.Trunc div 2;
  var ms := Milliseconds();
  C := (-0.3943, 0.5849); M := 225;
  drawJulia; drawXY(6, 3);drawSpecPoint;
  Window.Caption := Window.Caption + ' (' + (Milliseconds() - ms)
div 1000 + 's)';
  drawIteration;
       end.
```

Отметим, что данная программа универсальна. Универсальность понимается в том смысле, что, меняя значения параметра, мы будем получать различные множества Жюлиа, циклы и диски Зигеля.

Систематическая работа студентов, связанная с выполнением многоэтапных математико-информационных заданий, реализуется в широком спектре предлагаемых тем исследований: фрактальные кривые и поверхности на цилиндре Шварца; Компьютерное моделирование роста многогранных поверхностей цилиндра Шварца; Исследование многогранных поверхностей конуса и сферы Шварца-Смирнова; Фрактальная кривая Ван-дер-Вардена на окружности и др.

Заключение

Отметим, что выполнение ММИЗ «Циклы, множества Жюлиа и диски Зигеля» позволяет студентам использовать как математические методы, так и информационные и коммуникационные технологии. Причём, информационные технологии не играют вспомогательную роль, а являются важным инструментом, позволяющим выявить оригинальные множества Жюлиа, диски Зигеля и циклы, что, как уже отмечалось, развивает у студентов гибкость мышления, интуицию и толерантность к новизне – важнейшие креативные качества. При выполнении студентами контрольных заданий, связанных с созданием математических моделей с помощью информационных и коммуникационных технологий, наиболее высокие результаты получили студенты, выполнявшие ММИЗ, рассмотренное в данной статье. Кроме того, после выполнения ММИЗ «Циклы, множества Жюлиа и диски Зигеля» интерес студентов к математике и информатике возрос, что указывает на повышение их мотивации к данным дисциплинам.

Список литературы

Балакина Е.Е., Рыбина Л.Б., Секованов В.С., Щепин Р.А. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания Обрамление множества Мандельброта полиномов третьей степени и замечательные кривые // Вестник Костромского государственного университета. Серия: педагогика, психология, социэкономика. 2024. Т.30. №1. С. 63–72.

Дворяткина С.Н., Смирнов Е.И. Оценка синергетических эффектов интеграции знаний и деятельности на основе компьютерного моделирования // Современные информационные технологии и ИТ-образование. М.: 2016. МГУ. С. 35–42.

Дворяткина С.Н., Меренкова В.С., Смирнов Е.И. Диагностика готовности учащихся старших классов к исследовательской деятельности по математике как этап проектирования гибридной интеллектуальной обучающей среды // Перспективы науки и образования. 2021. № 6 (52). С. 192-210. DOI: 10.32744/pse.2021.6.13

Ивков В.А., Пигузов А.А., Секованов В.С., Фатеев А.С. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Построение фрактальных множеств с помощью L- систем и информационных технологий» как средство развития креативности студентов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12 №3-1. С 118–125.

Минлор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

Осташков В.Н., Смирнов Е.И., Белоногова Е.А. Синергия образования в исследовании аттракторов и бассейнов притяжения нелинейных отображений // Ярославский педагогический вестник. Серия психолого-педагогических наук. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2016. №6. С. 146–155.

Пайген Х.-О, Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1993.

Рыбина Л.Б., Березкина А.Е., Секованов В.С. О множествах Жюлиа функций, имеющих параболическую неподвижную точку // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин. Кострома: КГУ, 2018. С. 144–150.

Салов А.Л., Самохов Е.А., Секованов В.С. Использование кластера при исследовании фрактальных множеств на комплексной плоскости // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин, материалы V Всероссийской научно-методической конференции. 2011. С. 85–103.

Секованов В.С. Фрактальная геометрия. Преподавание, задачи, алгоритмы, синергетика, эстетика, приложения: учебное пособие. СПб: Издательство «Лань», 2019.

Секованов В.С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах // Фундаментальная и прикладная математика. 2016 а. Т. 21. №3. С. 185–199.

Секованов В.С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах // Фундаментальная и прикладная математика. Национальный Открытый университет «ИНТУИТ». 2016 б. Т. 21. Выпуск 3. С. 133–150.Секованов В.С. Голоморфная динамика. Учебное пособие. СПб: Издательство «Лань». 2021 а.

Секованов В.С. О множествах Жюлиа функций, имеющих неподвижные параболические точки // Фундаментальная и прикладная математика. 2021 б. Т. 23. Выпуск 4. С. 163–176.

Секованов В.С. Голоморфная динамика: учебное пособие. Второе издание, исправленное и дополненное СПб: Издательство «Лань». 2024.

Смирнов Е. И., Скорнякова А. Ю., Тихомиров С. А. Синергия освоения сложных систем и знаний как фактор роста креативного потенциала каждого школьника // Перспективы науки и образования. 2025. № 1. С. 380–400. https://doi.org/10.32744/pse.2025.1.25

Смирнов Е.И. Фундирование в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога. Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2012.

Morin E. Method. Nature of Nature. Moscow: Progress–Tradition, 2005.

Dvoryatkina S.N., Smirnov E.I., Martyushev N., Shcherbatykh S.V. Software Package to Support Students' Research Activities in the Hybrid Intellectual Environment of Mathematics Teaching. MDPI. Mathematics. 2023. 11, no. 4: 952. https://doi.org/10.3390/math11040952

Smirnov E.I. Complex Multi-Stage Tasks for Testing Schoolchildren in the Mathematics Course. Book Title: Structural and Technological Transformation of Education in the Post-Pandemic Period. Problems and Prospects. «Lecture Notes in Networks and Systems», 1282. A.L. Semenov et al. (eds.). DOI: 10.1007/978-3-031-84039-5_2, Springer, 2025, pp.103-113.

Smirnov E.I., Tikhomirov S.A., Dvoryatkina S.N. Self-organization technology of student's mathematical activities based on intelligent management. Perspectives of Science and Education. 2020. No. 45 (3). P. 77–86. DOI: 10.32744/pse.2020.3.6

DEVELOPMENT OF STUDENTS CREATIVITY IN THE STUDY OF MULTI-STAGE MATHEMATICAL AND INFORMATIONAL TASKS ON FRACTAL GEOMETRY

Sekovanov V. S.
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
sekovanovvs@yandex.ru
Kostroma
Kostroma State University

Smirnov E. I.
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
smiei@mail.ru
Yaroslavl, Vladikavkaz
Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky
Southern Mathematical Institute (branch)
Vladikavkaz Scientific Centre
of the Russian Academy of Sciences

Sekovanova L. A.
Dr. Sci (Technics), professor
sekovla@yandex.ru
Kostroma
Kostroma State Agricultural Academy

Shchepin R. A.
associate professor
kurlikchelovek@gmail.com
Kostroma
Kostroma State University

Abstract. The study of fractal geometry elements in student education is considered with the effect of student's creativity developing from the "problem zone" of vocational training. Cycles, Julia sets, and Siegel disks are studied in small groups form of students performing the multi-stage mathematical and informational tasks using mathematical and computer modeling. *The purpose of study* is to develop students' creativity in the process of researching complex sections of modern mathematics using mathematical and computer modeling. *Research methods*: visual modeling of complex systems and knowledge, founding of personal experience, computer modeling using Mathcad and GeoGebra, holomorphic dynamics, geometry of attractors and fixed points in the study of fractals. *Research results*: stages of student's research activity in the context of students' creativity growth, models and computer programs for new Julia sets and Siegel disks constructing for second-order polynomials.

Keywords: creativity, mathematical and computer modeling, Julia set filling, Siegel disk, fractal geometry

References

Balakina, E. E., Rybina, L. B., Sekovanov, V. S., Shchepin, R. A. (2024). Vypolnenie mnogoetapnogo matematiko-informacionnogo zadaniya Obramlenie mnozhestva Mandel'brota polinomov tret'ej stepeni i zamechatel'nye krivye. Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: pedagogika, psihologiya, sociekonomika, 30(1), 63-72.

Dvoryatkina, S. N., Merenkova, V. S., Smirnov, E. I. (2021). Diagnostika gotovnosti uchashchihsya starshih klassov k issledovatel'skoj deyatel'nosti po matematike kak etap proektirovaniya gibridnoj intellektual'noj obuchayushchej sredy. *Perspektivy nauki i obrazovaniya*, 6(52), 192-210. DOI: 10.32744/pse.2021.6.13.

Dvoryatkina, S. N., Smirnov, E. I. (2016). Ocenka sinergeticheskih effektov integracii znanij i deyatel'nosti na osnove komp'yuternogo modelirovaniya. *Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT–obrazovanie*. Moscow: MSU, 35-42.

Dvoryatkina, S. N., Smirnov, E. I., Martyushev, N., Shcherbatykh, S. V. (2023). Software Package to Support Students' Research Activities in the Hybrid Intellectual Environment of Mathematics Teaching. *MDPI. Mathematics*, 11(4), 952. https://doi.org/10.3390/math11040952.

Ivkov, V. A., Piguzov, A. A., Sekovanov, V. S., Fateev, A. S. (2016). Vypolnenie mnogoetapnogo matematiko-informacionnogo zadaniya «Postroenie fraktal'nyh mnozhestv s pomoshch'yu L-sistem i informacionnyh tekhnologij» kak sredstvo razvitiya kreativnosti studentov. *Sovremennye informacionnye tekhnologii i IT-obrazovanie*, 12(3-1), 118-125.

Minlor, Dzh. (2000). *Golomorfnaya dinamika*. Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika» (In Russ.).

Morin, E. (2005). *Nature of Nature*. Moscow: Progress–Tradition.

Ostashkov, V. N., Smirnov, E. I., Belonogova, E. A. (2016). Sinergiya obrazovaniya v issledovanii attraktorov i bassejnov prityazheniya nelinejnyh otobrazhenij. *Yaroslavskij pedagogicheskij vestnik. Seriya psihologo-pedagogicheskih nauk*, 6, 146-155.

Pajgen, H.-O, Rihter, P. H. (1993). *Krasota fraktalov. Obrazy kompleksnyh dinamicheskih sistem*: Per. s angl. Moscow: Mir.

Rybina, L. B., Berezkina, A. E., Sekovanov, V. S. (2018). O mnozhestvah Zhyulia funkcij, imeyushchih parabolicheskuyu nepodvizhnuyu tochku. *Aktual'nye problemy prepodavaniya informacionnyh i estestvenno-nauchnyh disciplin*. Kostroma: KGU, 144-150.

Salov, A. L., Samohov, E. A., Sekovanov, V. S. (2011). Ispol'zovanie klastera pri issledovanii fraktal'nyh mnozhestv na kompleksnoj ploskosti. *Aktual'nye problemy prepodavaniya informacionnyh i estestvenno-nauchnyh disciplin, materialy V Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konferencii*, 85-103.

Sekovanov, V. S. (2019). *Fraktal'naya geometriya. Prepodavanie, zadachi, algoritmy, sinergetika, estetika, prilozheniya: Uchebnoe posobie*. SPb: Izdatel'stvo «Lan'».

Sekovanov, V. S. (2016-a). O nekotoryh diskretnyh nelinejnyh dinamicheskih sistemah. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, 21 (3), 185-199.

Sekovanov, V. S. (2016-b). O nekotoryh diskretnyh nelinejnyh dinamicheskih sistemah. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika. Nacional'nyj Otkrytyj universitet* «*INTUIT*», 21 (3), 133-150.

Sekovanov, V. S. (2021-a). *Golomorfnaya dinamika. Uchebnoe posobie*. SPb: Izdatel'stvo «Lan'».

Sekovanov, V. S. (2021-b). O mnozhestvah Zhyulia funkcij, imeyushchih nepodvizhnye parabolicheskie tochki. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, 23(4), 163-176.

Sekovanov, V. S. (2024). *Golomorfnaya dinamika. Uchebnoe posobie*. Vtoroe izdanie, ispravlennoe i dopolnennoe. SPb: Izdatel'stvo «Lan'».

Smirnov, E. I., Skornyakova, A. Yu., & Tikhomirov, S. A. (2025). Synergy of complex systems and knowledge mastering as a factor of creative potential growth of each school student. *Perspectives of Science and Education*, 1, 380-400. https://doi.org/10.32744/pse.2025.1.25.

Smirnov, E. I. (2025). Complex Multi-Stage Tasks for Testing Schoolchildren in the Mathematics Course. *Structural and Technological Transformation of Education in the Post-Pandemic*

Period. Problems and Prospects. «*Lecture Notes in Networks and Systems*», 1282, A. L. Semenov et al. (eds.), Springer, 103-113. DOI: 10.1007/978-3-031-84039-5.

Smirnov, E. I., Tikhomirov, S. A., Dvoryatkina, S. N. (2020). Self-organization technology of student's mathematical activities based on intelligent management. *Perspectives of Science and Education*, 45 (3), 77-86. DOI: 10.32744/pse.2020.3.6.

Smirnov, E. I. (2012). Fundirovanie v professional'noj podgotovke i innovacionnoj deyatel'nosti pedagoga. Yaroslavl': Izd-vo «Kancler».

Статья поступила в редакцию 03.04.2025
Принята к публикации 09.04.2025