МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

DOI: 10.24888/2500-1957-2025-2-81-95

УДК 378.147

ПРИМЕНЕНИЕ ЯЗЫКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

Богун Виталий Викторович
к.п.н., доцент
vvvital@mail.ru
г. Ярославль

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

Аннотация. В настоящее время для исследования различных систем активно применяются информационно-коммуникационные технологии с точки зрения автоматизации процессов визуального представления значений параметров результатов расчётов, реализуемых на основе применения вычислительных алгоритмов различной степени сложности над значениями параметров исходных данных. Наряду с многосторонним применением прикладного программного обеспечения в силу имеющихся функциональных ограничений при исследовании различного вида систем целесообразно применение определённого языка программирования (например, интерпретируемого языка программирования Python), поскольку именно расширение функционала за счёт добавления полноценных алгоритмических конструкций реально способствует раскрытию возможностей по полноценному моделированию исследуемых процессов и явлений. В рамках статьи в качестве исследовательской базы рассматриваются экономические процессы с точки зрения применения основных математических объектов к решению комплексных задач по финансовой математике. Показано использование языка программирования Python применительно к финансовой математике с целью автоматизации процессов получения и наглядного представления значений параметров не только исходных данных и итоговых результатов расчётов, но и промежуточных результатов расчётов для оценки характера и динамических характеристик различных расчетных параметров через призму рассмотрения обозначенной предметной области исследования.

Ключевые слова: применение математических объектов в финансовой математике, информационно-коммуникационные технологии, интерпретируемый язык программирования Python.

Введение

По состоянию на настоящее время при решении задач по финансовой математике с точки зрения активного применения различных видов информационно-коммуникационных технологий наблюдается активная тенденция по переходу от количественного наращивания применяемого прикладного программного обеспечения в виде различных программных комплексов (например, редактора электронных таблиц Excel) для автоматизации применяемых расчётов различного уровня сложности к качественной их замене на собственные программные разработки, реализуемые с применением различных языков программирования (например, интерпретируемого языка программирования Python) (Хрипунова, 2022). Подобная смена направления вектора информатизации радикально меняет подход к автоматизации и визуальному представлению значений расчётных параметров исследуемых явлений и процессов с точки зрения реализации полноценного анализа необходимых данных в рамках обозначенной предметной области.

Целью статьи является представление возможностей интерпретируемого языка программирования Python для исследования применяемых в рамках финансовой математики математических объектов, что отражено в разработанном и изданном автором учебном пособии «Программирование задач по финансовой математике на языке программирования Python» (Богун, 2025).

Основная часть

При изучении финансовой математики начальными для рассмотрения математическими объектами являются определённые виды последовательностей чисел, которые формируются согласно обозначенным закономерностям, носящих зачастую рекурсивный подход. Для данных последовательностей осуществляется последовательный переход от значений параметров исходных данных к значениям параметров итоговых результатов расчётов с точки зрения реализации определённого количества итераций. Суть подобных последовательных переходов заключается в реализации вычислительных алгоритмов на основе интеграции арифметических и логических операций с точки зрения последовательного нахождения значений параметров промежуточных результатов, которые, как правило, являются значениями параметров промежуточных исходных данных для выполнения последующих расчётных итераций.

В частности, таковыми объектами в рамках базиса финансовой математики являются арифметическая и геометрическая прогрессии, в рамках которых рекурсивный подход отражается в получении значений элементов данных математических объектов через реализацию последовательного сложения (вычитания) или умножения (деления) значений элементов на заранее обозначенное постоянное число с целью получения возрастающей или убывающей арифметической или геометрической прогрессии соответственно.

С точки зрения финансовой математики данные математические объекты применяются для исследования базовых рассматриваемых процессов, представляемых в виде процессов наращения или дисконтирования необходимых денежных сумм.

В частности, арифметическая прогрессия применяется в качестве математической модели для описания процессов наращения или дисконтирования с применением простых процентов, тогда как геометрическая прогрессия как математический объект получила своё отражение в рамках исследования процессов наращения или дисконтирования с применением сложных процентов (Богун, 2025, Малыхин, 2017, Копнова, 2023). В таблице 1 ниже представлены основные особенности вычисления расчётных параметров арифметической и геометрической прогрессий.

Таблица 1. Расчётные параметры арифметической и геометрической прогрессий

Наименование параметра прогрессии	Расчётные формулы для прогрессий	
	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Рекуррентная формула	$a_{n+1} = a_n + d$	$b_{n+1} = b_n \cdot q$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Сумма n первых членов	$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$	$S_n = \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$ $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

При использовании языка программирования Python можно реализовать решение задачи, связанной с визуальным представлением процесса формирования значений элементов возрастающей и убывающей геометрических прогрессий с точки зрения представления значений как параметров исходных данных и итоговых результатов расчётов, так и значений промежуточных результатов расчётов для наглядного отображения процессов последовательного перехода в рамках каждой вычислительной итерации с точки зрения получения значений каждого из элементов числовых последовательностей, что отражено в качестве компонентов на рисунке 1 ниже (Богун, 2025).

На основе представленной расчётной базы осуществляется реализация аналогичных по своей сути вычислительных алгоритмов, лежащих в основе детализации процессов наращения или дисконтирования денежных сумм с применением простых или сложных процентов с применением интерпретируемого языка программирования Python.

Исходные данные

Наименование параметра	Обозначение	Значение
Арифметическая прогрессия		
Количество членов	arcol	12
Первый член	a1	128
Разность возрастающей прогрессии	dv	3
Разность убывающей прогрессии	du	-4
Геометрическая прогрессия		
Количество членов	gmcol	12
Первый член	b1	246
Знаменатель возрастающей прогрессии	qv	2
Знаменатель убывающей прогрессии	qu	0.25

Вывод значений параметров исходных данных для арифметических и геометрических прогрессий

Реализация расчетов значений параметров арифметических прогрессий

Номер члена арифметической прогрессии	Возрастающая прогрессия: Значение члена по рекуррентной формуле	Возрастающая прогрессия: Значение члена по формуле n-го члена	Возрастающая прогрессия: Сумма n первых членов прогрессии	Убывающая прогрессия: Значение члена по рекуррентной формуле	Убывающая прогрессия: Значение члена по формуле n-го члена	Убывающая прогрессия: Сумма n первых членов прогрессии
1	128	128	128	128	128	128
2	131	131	259	124	124	252
3	134	134	393	120	120	372
4	137	137	530	116	116	488
5	140	140	670	112	112	600
6	143	143	813	108	108	708
7	146	146	959	104	104	812
8	149	149	1108	100	100	912
9	152	152	1260	96	96	1008
10	155	155	1415	92	92	1100
11	158	158	1573	88	88	1188
12	161	161	1734	84	84	1272
Сумма членов прогрессии	1734	1734	1734	1272	1272	1272

Детализация реализуемых расчётов значений параметров промежуточных и итоговых результатов расчётов для возрастающей и убывающей арифметических прогрессий

Реализация расчетов значений параметров геометрических прогрессий

Номер члена геометрической прогрессии	Возрастающая прогрессия: Значение члена по рекуррентной формуле	Возрастающая прогрессия: Значение члена по формуле n-го члена	Возрастающая прогрессия: Сумма n первых членов прогрессии	Убывающая прогрессия: Значение члена по рекуррентной формуле	Убывающая прогрессия: Значение члена по формуле n-го члена	Убывающая прогрессия: Сумма n первых членов прогрессии
1	246	246	246	246.000000	246.000000	246.000000
2	492	492	738	61.500000	61.500000	307.500000
3	984	984	1722	15.375000	15.375000	322.875000
4	1968	1968	3690	3.843750	3.843750	326.718750
5	3936	3936	7626	0.960938	0.960938	327.679688
6	7872	7872	15498	0.240234	0.240234	327.919922
7	15744	15744	31242	0.060059	0.060059	327.979980
8	31488	31488	62730	0.015015	0.015015	327.994995
9	62976	62976	125706	0.003754	0.003754	327.998749
10	125952	125952	251658	0.000938	0.000938	327.999687
11	251904	251904	503562	0.000235	0.000235	327.999922
12	503808	503808	1007370	0.000059	0.000059	327.999980
Сумма членов прогрессии	1007370	1007370	1007370	327.999980	327.999980	327.999980

Детализация реализуемых расчётов значений параметров промежуточных и итоговых результатов расчётов для возрастающей и убывающей геометрических прогрессий

Рис. 1. Исследование параметров возрастающих и убывающих арифметических и геометрических прогрессий с применением языка программирования Python

Необходимо отметить, что при рассмотрении процессов наращения или дисконтирования с использованием простых или сложных процентов помимо реализации однократного начисления или удержания процентов возможно применение кратного или непрерывного начисления или удержания процентов на основе реализации определённых вычислительных алгоритмов (Брусов, 2013, Брусов, 2014, Бабайцев, 2011) в рамках интеграции соответствующих экономических и математических моделей.

Однако в рамках финансовой математики с точки зрения непрерывного начисления или удержания процентов в рамках процессов наращения или дисконтирования денежных сумм мы сталкиваемся с применением одного из частных видов пределов числовых последовательностей в виде второго замечательного предела (Криволапов, Хрипунова, 2022).

Как известно, под вторым замечательным пределом понимается предел числовой последовательности вида $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, нахождение которого изначально связано с наличием неопределённости вида $\left[1^\infty\right]$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left[1^\infty\right] = e \approx 2{,}7182818284.$$

В рамках финансовой математики с точки зрения реализации схем непрерывного начисления или удержания процентов используется следующая числовая последовательность: $a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn}$.

Для данной числовой последовательности получаем следующее значение предела:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn} = \left[1^\infty\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right)^{m\cdot k} = \left|\begin{array}{l} t=\frac{n}{k} \\ n\to\infty \\ t\to\infty \end{array}\right| = \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{m\cdot k} = e^{m\cdot k}.$$

Дальнейшее рассмотрение вопросов, связанных с решением задач по финансовой математике в рамках исследования экономических процессов, связано с использованием численных методов решения задач. В частности, численные методы целесообразно применять для выполнения расчётов значений определенных параметров как описанных ранее процессов наращения и дисконтирования, так и инвестиционных проектов при анализе финансовых потоков с точки зрения нахождения значения процентной ставки в виде внутренней нормы доходности, при которой чистая приведённая стоимость становится равной нулю.

С математической точки зрения для нахождения значения данного параметра необходимо найти решение сложного с аналитической точки зрения алгебраического уравнения вида $f(x)=0$, которое по сути и является исследуемым математическим объектом, с целью определения приближенного значения изолированного действительного корня x_n на отрезке $[x_{A0}, x_{B0}]$ с заранее обозначенной точностью ε на основе применения различных численных методов решения задач, например, метода золотой пропорции (Богун, 2014, Богун, 2011), метода половинного деления (дихотомии) или комбинированного метода хорд и трапеций (Лапчик, 2004).

В качестве примера представим логические основы алгоритма решения произвольного алгебраического уравнения с применением метода золотой пропорции.

Основная суть золотой пропорции, изображённой на рисунке 2, как уникального по своей природе математического объекта, состоит в следующем: если исходный отрезок C

разделить на отрезки A и B таким образом в соответствии с золотой пропорцией, отношение отрезков A и B аналогично отношению отрезков C и A, то есть отношение длин целого отрезка к большей его части равно отношению длин его большей части к меньшей, при этом, несмотря на очевидность получения данной пропорциональной зависимости, в качестве коэффициента пропорциональности получается иррациональное число:

$$\frac{C}{A}=\frac{A}{B}=\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618033989\,.$$

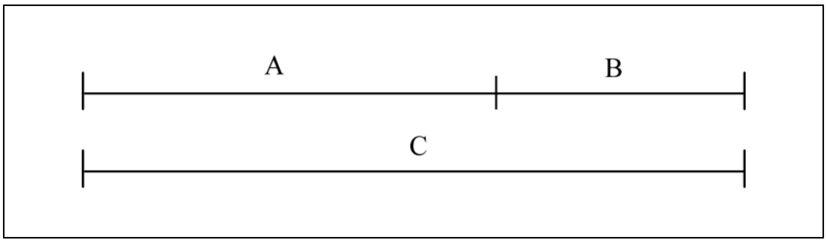

Рис. 2. Наглядное представление золотой пропорции

Действительно, пусть имеем следующее соотношение:

$$\frac{C}{A}=\frac{A}{B}=X\,.$$

Так как $A+B=C$ и, как следствие, $\frac{A}{A}+\frac{B}{A}=\frac{C}{A}$, то получим квадратное уравнение:

$$1+\frac{1}{X}=X \Rightarrow X^2-X-1=0\,.$$

Положительный действительный корень представленного квадратного уравнения имеет следующее значение:

$$X=\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618033989\,.$$

С точки зрения приближенного решения алгебраических уравнений метод золотой пропорции как один из эффективных численных методов решения имеет следующую реализацию:

1. Если перед началом итераций достигнута истинность выражения $\left|x_{BN}^{GP}-x_{AN}^{GP}\right|<2\varepsilon$, то количество шагов итераций $s_{\varepsilon}^{GP}=0$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_{ε}^{GP} выбирается $x_{N}^{GP}=\frac{x_{AN}^{GP}+x_{BN}^{GP}}{2}$.

2. Если осуществляется первая по номеру итерация $(N=1)$, то $x_{AN}^{GP}=x_{A1}^{GP}=x_A$ и $x_{BN}^{GP}=x_{B1}^{GP}=x_B$.

3. Пока выполняется истинность выражения $\left|x_{BN}^{GP}-x_{AN}^{GP}\right|\geq 2\varepsilon$, где *«N»* является отдельно взятым номером итерации $(N\geq 1)$, реализуется следующий алгоритм:

3.1. На искомом отрезке $\left[x_{AN}^{GP},x_{BN}^{GP}\right]$ при соблюдении условий $x_{AN}^{GP}<x_{BN}^{GP}$ и $f\left(x_{AN}^{GP}\right)\cdot f\left(x_{BN}^{GP}\right)<0$ выбираются точки с абсциссами x_{CN}^{GP} и x_{DN}^{GP}, исходя из неравенства

$x_{AN}^{GP} < x_{CN}^{GP} < x_{DN}^{GP} < x_{BN}^{GP}$, в соответствии с принципами золотой пропорции, согласно следующим соотношениям:

$$x_{CN}^{GP} = x_{AN}^{GP} + \frac{x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP}}{\varphi^2} = x_{BN}^{GP} - \frac{x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP}}{\varphi},$$

$$x_{DN}^{GP} = x_{AN}^{GP} + \frac{x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP}}{\varphi} = x_{BN}^{GP} - \frac{x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP}}{\varphi^2}.$$

3.2. Если $f\left(x_{AN}^{GP}\right) \cdot f\left(x_{CN}^{GP}\right) < 0$, то $x_{A(N+1)}^{GP} = x_{AN}^{GP}$, $x_{B(N+1)}^{GP} = x_{CN}^{GP}$, $x_{B(N+1)}^{GP} - x_{A(N+1)}^{GP} = x_{CN}^{GP} - x_{AN}^{GP}$ и получаем отрезок $\left[x_{A(N+1)}^{GP}, x_{B(N+1)}^{GP}\right] = \left[x_{AN}^{GP}, x_{CN}^{GP}\right]$.

3.3. Если $f\left(x_{CN}^{GP}\right) \cdot f\left(x_{DN}^{GP}\right) < 0$, то $x_{A(N+1)}^{GP} = x_{CN}^{GP}$, $x_{B(N+1)}^{GP} = x_{DN}^{GP}$, $x_{B(N+1)}^{GP} - x_{A(N+1)}^{GP} = x_{DN}^{GP} - x_{CN}^{GP}$ и получаем отрезок $\left[x_{A(N+1)}^{GP}, x_{B(N+1)}^{GP}\right] = \left[x_{CN}^{GP}, x_{DN}^{GP}\right]$.

3.4. Если $f\left(x_{DN}^{GP}\right) \cdot f\left(x_{BN}^{GP}\right) < 0$, то $x_{A(N+1)}^{GP} = x_{DN}^{GP}$, $x_{B(N+1)}^{GP} = x_{BN}^{GP}$, $x_{B(N+1)}^{GP} - x_{A(N+1)}^{GP} = x_{BN}^{GP} - x_{DN}^{GP}$ и получаем отрезок $\left[x_{A(N+1)}^{GP}, x_{B(N+1)}^{GP}\right] = \left[x_{DN}^{GP}, x_{BN}^{GP}\right]$.

4. Если достигнута истинность выражения $\left|x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP}\right| < 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_{\varepsilon}^{GP} = N$ и в качестве приближенного значения действительного корня исследуемого алгебраического уравнения x_{ε}^{GP} выбирается абсцисса $x_N^{GP} = \dfrac{x_{AN}^{GP} + x_{BN}^{GP}}{2}$, иначе осуществляется переход к следующей итерации.

Очевидно, что для решения данной вычислительной задачи необходимо применение различных видов информационно-коммуникационных технологий. В частности, возможна программная реализация представленного метода золотой пропорции с использованием интерпретируемого языка программирования Python. В рамках программы необходима реализация возможностей, во-первых, по генерации необходимого вида алгебраического уравнения, включающего обозначенную неизвестную с представлением массива значений параметров исходных данных в виде числовых значений коэффициентов уравнения и начальными условиями поиска приближенного решения, а, во-вторых, отражения значений параметров как итоговых результатов расчётов с целью фиксирования итогового приближенного решения уравнения, так и промежуточных результатов расчётов для оценки динамики получения данного решения в рамках последовательно выполняемых вычислительных итераций (Богун, 2014).

На рисунке 3 ниже для заданных значений параметров исходных данных в виде коэффициентов алгебраического уравнения вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, то есть a, b, c, d и параметров реализации численный методов решения алгебраического уравнения x_{A0}, x_{B0} и ε представлена реализация на основе применения языка программирования Python метода золотой пропорции с точки зрения нахождения приближенного числового значения одного из действительных корней исследуемого алгебраического уравнения согласно в соответствии с описанным выше вычислительным алгоритмом с наглядным представлением значений исходных данных, всех промежуточных и итоговых результатов расчётов (Богун, 2025).

Исходные данные		
Наименование параметра	Обозначение	Значение
Параметры алгебраического уравнения a*x^3+b*x^2+c*x+d = 0		
Коэффициент уравнения	a	4
Коэффициент уравнения	b	-8
Коэффициент уравнения	c	-9
Коэффициент уравнения	d	7
Получаемое алгебраическое уравнение вида f(x) = 0: 4*pow(x,3)-8*pow(x,2)-9*pow(x,1)+7*pow(x,0) = 0		
Общие параметры для численных методов решения уравнения		
Начало числового промежутка аргумента	xa0	0.10000
Конец числового промежутка аргумента	xb0	1.00000
Погрешность вычислений для аргумента	eps	0.00030

Вывод значений параметров исходных данных для исследуемого алгебраического уравнения

Реализация расчетов по методу золотой пропорции

Номер n	xgpan	f(xgpan)	xgpbn	f(xgpbn)	|xgpbn-xgpan|	xgpcn	f(xgpcn)	xgpdn	f(xgpdn)
1	0.1000000	6.02400	1.0000000	-6.00000	0.9000000	0.4437694	1.78019	0.6562306	-1.22079
2	0.4437694	1.78019	0.6562306	-1.22079	0.2124612	0.5249224	0.64991	0.5750776	-0.06067
3	0.5249224	0.64991	0.5750776	-0.06067	0.0501553	0.5440800	0.37934	0.5559200	0.21156
4	0.5559200	0.21156	0.5750776	-0.06067	0.0191576	0.5632376	0.10769	0.5677601	0.04342
5	0.5677601	0.04342	0.5750776	-0.06067	0.0073176	0.5705551	0.00368	0.5722826	-0.02090
6	0.5705551	0.00368	0.5722826	-0.02090	0.0017274	0.5712150	-0.00571	0.5716228	-0.01151
7	0.5705551	0.00368	0.5712150	-0.00571	0.0006598	0.5708072	0.00009	0.5709629	-0.00212

Детализация реализуемых расчётов значений параметров в процессе применения метода золотой пропорции для приближенного решения алгебраического уравнения

Итоговые результаты решения алгебраического уравнения		
Наименование параметра	Обозначение	Значение
Python Расчет с применением метода fsolve()		
Корень уравнения	fsznx	0.5708137
Значение функции	f(fsznx)	0.0000000
Python Расчет по методу половинного деления (дихотомии)		
Корень уравнения xdheps	dhznx	0.5708740
Значение функции f(xdheps)	f(dhznx)	-0.0008585
Python Расчет по методу золотой пропорции		
Корень уравнения xgpeps	gpznx	0.5708851
Значение функции f(xgpeps)	f(xgpppr)	-0.0010154

Вывод значений параметров итоговых результатов расчётов с применением метода золотой пропорции и встроенных функциональных возможностей языка программирования Python

Рис. 3. Реализация численного метода решения алгебраического уравнения с применением языка программирования Python

Численные методы решения алгебраических уравнений могут применяться в продолжение темы финансовых потоков с точки зрения исследования финансовых рент или аннуитетов, под которыми понимается регулярный финансовый или поток, в рамках которого платежи реализуются строго через заранее обозначенные равные промежутки времени, называемые периодом ренты. Необходимо учитывать, что ренты разделяются с учётом времени выполнения каждого из необходимых платежей. В частности, для авансированных рент (пренумерандо) платёж осуществляется в начале периода, тогда как для обыкновенных рент (постнумерандо) платёж осуществляется в конце периода), при этом учитывается применение как однократных, так и многократных начислений сложных процентов и выполнения платежей в течение одного года с точки зрения реализации необходимых вычислительных алгоритмов. Автором в разработанном учебном пособии осуществлена реализация работы с рентами с корректным отображением значений всех параметров как исходных данных, так и промежуточных и итоговых результатов расчётов на основе применения языка программирования Python (Богун, 2025).

Представим теперь основные моменты, связанные с использованием в рамках финансовой математики основного вида объектов линейной алгебры, представляемого в виде матриц различных видов, которые применяются при исследовании экономических процессов с точки зрения решения достаточно широкого круга прикладных задач.

Как известно, под матрицей как математическим объектом в общем виде понимается прямоугольная таблица, структурно состоящая из определённого в рамках обозначенной размерности количества строк и столбцов, в качестве значений элементов которой выступают числовые значения, расположенные на пересечении заданных с помощью индексов или номеров строки и столбца матрицы.

Ниже представлена прямоугольная матрица, для которой количество строк отличается от количества столбцов.

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 6 & \dots & 0 \\ 10 & -3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3 & 2 & \dots & 4 \end{pmatrix},$$

где:

$\underset{m\times n}{A}$ – прямоугольная матрицы размерностью *m* строк на *n* столбцов;

a_{mn} – элемент прямоугольной матрицы с индексами строки *m* и столбца *n*;

$a_{mn}=4$ – числовое значение элемента прямоугольной матрицы с индексами строки *m* и столбца *n*.

Как известно, над матрицами общего вида можно реализовывать следующие арифметические операции:

1. Сложение и вычитание матриц. Матрицы должны иметь одинаковую размерность, результатом операции является новая матрица аналогичной размерности, значение каждого элемента которой определяется как сумма или разность соответствующих элементов исходных матриц.

2. Умножение матрицы на число. Результатом операции является новая матрица аналогичной размерности, значение каждого элемента которой определяется как произведение каждого элемента исходной матрицы и представленного числа.

3. Транспонирование матрицы. Результатом операции является новая матрица противоположной размерности, в которой строки и столбцы заменяются местами по отношению к исходной матрице.

4. Умножение матриц. Для реализации операции необходимо выполнение условия равенства количества столбцов первой матрицы количеству строк второй матрицы. При выполнении данного условия произведение двух матриц существует, при этом размерность итоговой матрицы определяется количеством строк первой матрицы и количеством столбцов второй матрицы. Значение каждого элемента матрицы равно сумме произведений элементов строки первой матрицы и столбца второй матрицы в соответствии со значениями индексов строки и столбца для необходимого элемента.

Для демонстрации работы с матрицами с применением языка программирования Python можно показать решение вычислительной задачи, в рамках которой необходимо для двух прямоугольных матриц определённой размерности с заданными значениями элементов реализовать операции по транспонированию и умножению представленных матриц, согласно необходимым вычислительным алгоритмам с наглядным представлением значений всех параметров промежуточных и итоговых результатов расчётов с применением интерпретируемого языка программирования Python, что представлено в наглядном виде на рис. 4 ниже.

```
Вывод матрицы A (алгоритм):
|---------|---------|---------|---------|
| Индексы |    1    |    2    |    3    |
|---------|---------|---------|---------|
|    1    |   -6    |    7    |    8    |
|    2    |    8    |   -5    |   -3    |
|    3    |    4    |    1    |   -5    |
|    4    |   -7    |   -6    |    4    |
|---------|---------|---------|---------|
Вывод матрицы A (Python):
[[-6  7  8]
 [ 8 -5 -3]
 [ 4  1 -5]
 [-7 -6  4]]
Вывод матрицы B (алгоритм):
|---------|---------|---------|---------|---------|
| Индексы |    1    |    2    |    3    |    4    |
|---------|---------|---------|---------|---------|
|    1    |    6    |   -8    |    7    |    2    |
|    2    |   -4    |    3    |    8    |   -6    |
|    3    |    5    |    7    |   -3    |    9    |
|---------|---------|---------|---------|---------|
Вывод матрицы B (Python):
[[ 6 -8  7  2]
 [-4  3  8 -6]
 [ 5  7 -3  9]]
```

Вывод значений параметров исходных данных для двух прямоугольных матриц

```
Вывод матрицы AT в качестве результата транспонирования матрицы A (алгоритм):
|---------|---------|---------|---------|---------|
| Индексы |    1    |    2    |    3    |    4    |
|---------|---------|---------|---------|---------|
|    1    |   -6    |    8    |    4    |   -7    |
|    2    |    7    |   -5    |    1    |   -6    |
|    3    |    8    |   -3    |   -5    |    4    |
|---------|---------|---------|---------|---------|
Вывод матрицы AT в качестве результата транспонирования матрицы A (Python):
[[-6  8  4 -7]
 [ 7 -5  1 -6]
 [ 8 -3 -5  4]]
Вывод матрицы BT в качестве результата транспонирования матрицы B (алгоритм):
|---------|---------|---------|---------|
| Индексы |    1    |    2    |    3    |
|---------|---------|---------|---------|
|    1    |    6    |   -4    |    5    |
|    2    |   -8    |    3    |    7    |
|    3    |    7    |    8    |   -3    |
|    4    |    2    |   -6    |    9    |
|---------|---------|---------|---------|
Вывод матрицы BT в качестве результата транспонирования матрицы B (Python):
[[ 6 -4  5]
 [-8  3  7]
 [ 7  8 -3]
 [ 2 -6  9]]
```

Итоговые результаты выполнения операции транспонирования матрицы для исходных двух матриц

```
Вывод матрицы C в качестве результата умножения двух матриц A и B, то есть C = AXB (алгоритм):
|---------|---------|---------|---------|---------|
| Индексы |    1    |    2    |    3    |    4    |
|---------|---------|---------|---------|---------|
|    1    |   -24   |   125   |   -10   |   18    |
|    2    |   53    |  -100   |   25    |   19    |
|    3    |   -5    |   -64   |   51    |   -43   |
|    4    |    2    |   66    |  -109   |   58    |
|---------|---------|---------|---------|---------|
Вывод матрицы C в качестве результата умножения двух матриц A и B, то есть C = AXB (Python):
[[ -24  125  -10   18]
 [  53 -100   25   19]
 [  -5  -64   51  -43]
 [   2   66 -109   58]]
Вывод матрицы D в качестве результата умножения двух матриц B и A, то есть D = BXA (алгоритм):
|---------|---------|---------|---------|
| Индексы |    1    |    2    |    3    |
|---------|---------|---------|---------|
|    1    |   -86   |   77    |   45    |
|    2    |   122   |    1    |  -105   |
|    3    |   -49   |   -57   |   70    |
|---------|---------|---------|---------|
Вывод матрицы D в качестве результата умножения двух матриц B и A, то есть D = BXA (Python):
[[ -86   77   45]
 [ 122    1 -105]
 [ -49  -57   70]]
```

Итоговые результаты выполнения операции умножения матриц для исходных двух матриц

Рис. 4. Реализация арифметических операций над прямоугольными матрицами с применением языка программирования Python

Также необходимо представить основные аспекты применения языка программирования Python для реализации работы с объектами математической статистики в виде отдельно взятых или рассматриваемых в совокупности двух и более выборок данных, которые имеют важное значение для проведения экономических исследований в рамках финансовой математики.

В таблице 2 ниже представлено задание выборки данных с точки зрения исследования количественного признака *X*, взятой из генеральной совокупности данных, с различными или периодически повторяющимися вариантами числовых значений определённого объёма выборки *n*.

Таблица 2. Задание выборки данных

Порядковый номер	Значение признака
1	x_1
2	x_2
...	…
$n-1$	x_{n-1}
n	x_n

Представим на математическом языке в виде соответствующих формул расчётные алгоритмы для нахождения числовых значений следующих параметров обозначенной выборки данных:

1. Выборочная средняя определяется как среднее арифметическое всех представленных в рамках выборки значений вариантов:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}.$$

2. Выборочная исправленная дисперсия определяется как среднее арифметическое значений всех квадратов отклонений, представленных в рамках выборки вариантов, от выборочной средней с поправкой на исправленный вариант реализации:

$$\overline{D_x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\left(x_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{X}\right)^2 + \ldots + \left(x_{n-1} - \overline{X}\right)^2 + \left(x_n - \overline{X}\right)^2}{n-1}.$$

3. Выборочное исправленное среднее квадратическое отклонение определяется как квадратный корень из значения выборочной исправленной дисперсии для исследуемой выборки данных:

$$\overline{\sigma_x} = \sqrt{\overline{D_x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\left(x_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{X}\right)^2 + \ldots + \left(x_{n-1} - \overline{X}\right)^2 + \left(x_n - \overline{X}\right)^2}{n-1}}.$$

В таблице 3 представлено задание совокупности двух выборок данных с точки зрения исследования пары количественных признаков X_1 и X_2, взятой по аналогии с одной выборки из генеральной совокупности данных с различными или периодически повторяющимися вариантами соответствующих значений определённого объёма выборки *n*.

Таблица 3. Задание совокупности двух выборок данных

Порядковый номер	Значение признака 1	Значение признака 2
1	x_1	x_{21}
2	x_2	x_{22}
...	$\cdots$	$\cdots$
$n-1$	x_{n-1}	$x_{2(n-1)}$
n	x_n	x_{2n}

Представим на математическом языке в виде соответствующих формул расчётные алгоритмы для нахождения числовых значений следующих параметров обозначенной совокупности двух выборок данных:

1. Выборочная исправленная ковариация определяется как среднее арифметическое значение всех произведений отклонений, представленных в рамках совокупности выборок соответствующих вариантов от выборочных средних с поправкой на исправленный вариант реализации:

$$\overline{\mathrm{cov}_{x_1,x_2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{1i}-\overline{X_1}\right)\cdot\left(x_{2i}-\overline{X_2}\right)}{n-1} =$$

$$= \frac{\left(x_{11}-\overline{X_1}\right)\cdot\left(x_{21}-\overline{X_2}\right)+\left(x_{12}-\overline{X_1}\right)\cdot\left(x_{22}-\overline{X_2}\right)+\ldots+\left(x_{1n}-\overline{X_1}\right)\cdot\left(x_{2n}-\overline{X_2}\right)}{n-1}.$$

2. Выборочный исправленный коэффициент корреляции определяется как отношение значения выборочной исправленной ковариации к произведению значений выборочных исправленных среднеквадратических отклонений каждой из выборок:

$$\overline{r_{x_1,x_2}} = \frac{\overline{\mathrm{cov}_{x_1,x_2}}}{\overline{\sigma_{x_1}}\cdot\overline{\sigma_{x_2}}}.$$

После нахождения числового значения выборочного исправленного коэффициента корреляции формулируется вывод о характере и силе возможной связи между представленными в рамках совокупности отдельно взятыми выборками данных с точки зрения значений двух признаков для одной конечной совокупности данных, что и является итоговым результатом проводимого статистического исследования представленного числового массива данных.

На рис. 5 и рис. 6 представлена реализация статистического анализа определённых отдельно взятых выборок данных в рамках обозначенной совокупности двух выборок данных через призму выполнения автоматизированных расчётов значений параметров как для одиночных выборок данных (выборочные средние, выборочные дисперсии и средние квадратические отклонения), так и для совокупности выборок данных (выборочная ковариация, коэффициент корреляции с учётом интерпретации полученного числового значения параметра) с применением языка программирования Python на основе автоматизации обозначенных расчётных алгоритмов с представлением значений всех параметров промежуточных и итоговых результатов расчётов.

Исходные данные				
Номер замера параметра	Первая выборка данных		Вторая выборка данных	
	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
1	x11	4	x21	-3
2	x12	-5	x22	5
3	x13	6	x23	7
4	x14	8	x24	-9
5	x15	3	x25	6
6	x16	9	x26	8
7	x17	7	x27	3

Вывод значений параметров исходных данных для двух исследуемых выборок данных

Расчеты выборочных средних для двух выборок данных				
Номер замера параметра	Первая выборка данных		Вторая выборка данных	
	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
1	sumx11	4	sumx21	-3
2	sumx12	-1	sumx22	2
3	sumx13	5	sumx23	9
4	sumx14	13	sumx24	0
5	sumx15	16	sumx25	6
6	sumx16	25	sumx26	14
7	sumx17	32	sumx27	17
7	SumX1	32	SumX2	17

Итоговые результаты расчетов выборочных средних для двух выборок данных				
Наименование параметра	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
Расчет Выборочные средние для двух выборок данных	Расчет X1	4.57	Расчет X2	2.43
Расчет Выборочные средние для двух выборок данных	Python X1	4.57	Python X2	2.43

Детализация расчётов значений выборочных средних двух исследуемых выборок данных

Расчеты выборочных дисперсий для двух выборок данных				
Номер замера параметра	Первая выборка данных		Вторая выборка данных	
	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
1	sumd11	0.33	sumd21	29.47
2	sumd12	91.94	sumd22	36.08
3	sumd13	93.98	sumd23	56.98
4	sumd14	105.73	sumd24	187.59
5	sumd15	108.20	sumd25	200.35
6	sumd16	127.82	sumd26	231.39
7	sumd17	133.71	sumd27	231.71
7	SumD1	133.71	SumD2	231.71

Итоговые результаты расчетов выборочных дисперсий для двух выборок данных				
Наименование параметра	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
Расчет Выборочные дисперсии для двух выборок данных	Расчет D1	22.29	Расчет D2	38.62
Расчет Выборочные дисперсии для двух выборок данных	Python D1	22.29	Python D2	38.62

Детализация расчётов значений выборочных дисперсий двух исследуемых выборок данных

Итоговые результаты расчетов выборочных средних квадратических отклонений двух выборок данных				
Наименование параметра	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
Расчет Выборочные средние квадратическ. отклонения для двух выборок данных	Расчет S1	4.72	Расчет S2	6.21
Python Выборочные средние квадратическ. отклонения для двух выборок данных	Python S1	4.72	Python S2	6.21

Итоговые результаты расчётов выборочных средних квадратических отклонений
для двух исследуемых выборок данных

Рис. 5. Реализация статистического анализа отдельных выборок данных в рамках совокупности двух выборок данных с применением языка программирования Python

Расчеты выборочной ковариации для совокупности двух вариационных рядов		
Номер замера параметра	Два вариационнных ряда	
	Обозначение	Значение
1	sumc121	3.10
2	sumc122	-21.51
3	sumc123	-14.98
4	sumc124	-54.16
5	sumc125	-59.78
6	sumc126	-35.10
7	sumc127	-33.71
7	ResSumc12	-33.71

Итоговые результаты расчетов выборочной ковариации для совокупности двух вариационных рядов		
Наименование параметра	Обозначение	Значение
Расчет Выборочная ковариация для совокупности двух вариационных рядов	Расчет C12	-5.62
Python Выборочная ковариация для совокупности двух вариационных рядов	Python C12	-5.62

Детализация расчётов выборочной ковариации между двумя исследуемыми выборками данных

Итоговые результаты расчетов коэффициента корреляции между двумя выборками данных		
Наименование параметра	Обозначение	Значение
Расчет Выборочный коэффициент корреляции между двумя выборками данных	Расчет K12	-0.19
Python Выборочный коэффициент корреляции между двумя выборками данных	Python C12	-0.19
Характер связи между двумя выборками данных	CharRel12	Обратная
Сила связи между двумя выборками данных	PowerRel12	Слабая

Итоговые результаты расчётов и интерпретация значения выборочного коэффициента корреляции для совокупности двух исследуемых выборок данных

Рис. 6. Реализация статистического анализа совокупности двух выборок данных с применением языка программирования Python

Описанные выше математические объекты в виде прямоугольных матриц и выборок данных, рассматриваемых по отдельности или в рамках совокупности двух и более выборок данных, с точки зрения финансовой математики находят своё отражение при исследовании динамических процессов, связанных с формированием и поведением на фондовом рынке инвестиционного портфеля, состоящего из одного, двух и более видов ценных бумаг, взятых в определённых пропорциях, и характеризующихся с точки зрения задания исходных данных конечными множествами значений выборочных величин доходностей, с целью определения не только значений основных параметров портфеля в целом (доходностей, квадрат риска и собственно риск), но и формированием оптимального портфеля, состоящего из нескольких видов ценных бумаг, например, с точки зрения максимальной доходности и минимального риска портфеля.

Заключение

Таким образом, в рамках обозначенной выше статьи показаны аспекты реализации известных математических объектов с точки зрения исследования различных процессов, рассматриваемых в рамках финансовой математики, что наглядно показывает яркую интеграционную связь между математикой и экономикой. В наглядной форме представлено применение информационно-коммуникационных технологий в виде авторских программ, разработанных на основе применения интерпретируемого языка программирования Python, для автоматизации решения определенного круга комплексных задач по исследованию математических объектов, используемых в дальнейшем для исследования экономических процессов на основе адекватной и эффективной интеграции экономических, математических и информационных моделей.

В рамках разработанного и изданного автором учебного пособия «Программирование задач по финансовой математике на языке программирования Python» показаны различные аспекты применения рассмотренных математических объектов по отношению к исследованию экономических процессов через призму рассмотрения различных аспектов реализации финансовой математики в сопровождении определённых дидактических составляющих и необходимого детального описания представленных локальных программ, выполненных на основе использования интерпретируемого языка программирования Python.

Список литературы

Бабайцев В.А., Гисин В.Б. Математические методы финансового анализа. М.: Финуниверситет, 2011.

Богун В.В. Программирование задач по финансовой математике на языке программирования Python: учебное пособие. М.: Прометей, 2025.

Богун В.В. Дистанционные динамические расчётные проекты по исследованию функций вещественного переменного: учебное пособие. Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2014.

Богун В.В. Реализация расчётных проектов при организации дистанционного обучения математике // Компьютерные инструменты в образовании. 2011. № 6. С. 33–37.

Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В. Финансовая математика. М.: Кнорус, 2013.

Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В. Задачи по финансовой математике. М.: Кнорус, 2014.

Копнова Е.Д. Финансовая математика: учебник и практикум для вузов. М.: Юрайт, 2023. (Высшее образование). Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. URL: https://urait.ru/bcode/511234 (дата обращения: 01.03.2025).

Хрипунова М.Б. Экономика на Python: учебник. М.: Прометей, 2021.

Криволапов С.Я., Хрипунова М.Б. Математика на Python: учебник. Москва: Кнорус, 2022.

Лапчик, М.П., Рагулина, М.И., Хеннер, Е.К. Численные методы: Учеб. пособие для студ. вузов: учеб. пособие. М.: Издательский центр «Академия», 2004.

Малыхин В.И. Финансовая математика: учебное пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2017.

THE USE OF THE PYTHON PROGRAMMING LANGUAGE FOR THE STUDY OF MATHEMATICAL OBJECTS IN FINANCIAL MATHEMATICS

Bogun V. V.
Ph.D. (Pedagogy), associate Professor
vvvital@mail.ru
Yaroslavl

Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky

Abstract. Currently, information and communication technologies are actively used to study various systems from the perspective of automating the processes of visual

representation of the parameter values of calculation results, implemented based on the use of computational algorithms of varying complexity, over the values of the initial data parameters. Along with the multifaceted application of application software due to existing functional limitations when researching various types of systems, it is appropriate to use a specific programming language (for example, the interpreted programming language Python), as it is the expansion of functionality through the addition of full-fledged algorithmic constructs that truly helps to uncover the possibilities for full modeling of the processes and phenomena being studied. Within the framework of the article, economic processes are examined as a research basis from the perspective of applying fundamental mathematical objects to solve complex problems in financial mathematics. The use of the Python programming language in relation to financial mathematics is demonstrated with the aim of automating the processes of obtaining and visually presenting the values of parameters not only of the initial data and final results of calculations, but also of intermediate results of calculations to assess the nature and dynamic characteristics of various calculated parameters through the lens of the defined research subject area.
Keywords: application of mathematical objects in financial mathematics, information and communication technologies, interpreted programming language Python .

References

Babajcev, V. A., Gisin, V. B. (2011). *Matematicheskie metody finansovogo analiza*. Moscow: Finuniversitet. (In Russ.)

Bogun, V. V. (2025). *Programmirovanie zadach po finansovoj matematike na yazyke programmirovaniya Python*: *Uchebnoe posobie*. Moscow: Prometej. (In Russ.)

Bogun, V. V. (2014). *Distancionnye dinamicheskie raschetnye proekty po issledovaniyu funkcij veshchestvennogo peremennogo: ucheb. posobie*. Yaroslavl': Izd-vo «Kancler». (In Russ.)

Bogun, V. V. (2011). Realizaciya raschetnyh proektov pri organizacii distancionnogo obucheniya matematike. *Komp'yuternye instrumenty v obrazovanii*, 6, 33-37. (In Russ.)

Brusov, P. N., Brusov, P. P., Orekhova, N. P., Skorodulina, S. V. (2013). *Finansovaya matematika*. Moscow: Knorus. (In Russ.)

Brusov, P. N., Brusov, P. P., Orekhova, N. P., Skorodulina, S. V. (2014). *Zadachi po finansovoj matematike*. Moscow: Knorus. (In Russ.)

Kopnova, E. D. (2023). *Finansovaya matematika: Uchebnik i praktikum dlya vuzov*. Moscow: Yurajt. (Vysshee obrazovanie). Tekst: elektronnyj / Obrazovatel'naya platforma Yurajt [sajt]. URL: https://urait.ru/bcode/511234 (data obrashcheniya: 01.03.2025).

Khripunova M.B. Economics in Python: a textbook. Moscow: Prometey, 2021. (In Russ.)

Krivolapov S.Ya., Khripunova M.B. Mathematics in Python: a textbook. Moscow: Knorus, 2022. (In Russ.)

Lapchik, M. P., Ragulina, M. I., Henner, E. K. (2004). *Chislennye metody: Ucheb. posobie dlya stud. vuzov: ucheb. posobie*. Moscow: Izdatel'skij centr «Akademiya». (In Russ.)

Malyhin, V. I. (2017). *Finansovaya matematika: Uchebnoe posobie dlya vuzov*. 2-e izd., pererab. i dop. Moscow: YuNITI-DANA. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 17.04.2025
Принята к публикации 05.05.2025