МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

DOI: 10.24888/2500-1957-2025-3-8-22

УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ РЕКУРСИВНОГО ПОДХОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РАВНОБЕДРЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ НА ПЛОСКОСТИ

Богун Виталий Викторович
к.п.н., доцент
vvvital@mail.ru
г. Ярославль

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

Аннотация. Рекурсивный подход является методом, благодаря которому достаточно большое количество объектов живой и неживой природы структурно рассматривается через призму многократного или бесконечного внедрения самих в себя согласно определённым закономерностям. С точки зрения алгебраических структур рекурсивный метод применяется в рамках рассмотрения формирования степеней золотого числа или чисел Фибоначчи, тогда как в рамках геометрии на плоскости самым наглядным применением рекурсивного подхода являются различные виды фракталов, которые могут отражать структуры различных объектов окружающей действительности. В статье приводятся как общепризнанные аспекты реализации рекурсивного подхода с точки зрения алгебры, так и авторское применение рассматриваемого подхода через призму исследования последовательностей равнобедренных треугольников, имеющих единый линейный элемент, через призму равенства угловых элементов, представленных в виде углов при вершинах, образованных пересечением боковых сторон и основания, исходного треугольника и угла при вершине, образованного пересечением боковых сторон, получаемого в результате итерации нового треугольника. Показывается использование сформулированной автором геометрической интерпретации рекурсивного подхода применительно к исследованию свойств золотого треугольника. Золотая пропорция может всесторонне исследоваться обучающимися как уникальный математический объект в процессе изучения математики.

Ключевые слова: обучение математике, рекурсивный подход, золотое число, последовательность Фибоначчи, последовательность равнобедренных треугольников, золотой треугольник

Введение

Рекурсивный подход является одним из основных методов, согласно которому структурно формируется большое количество алгебраических и геометрических объектов, и заключается в рассмотрении исследуемого объекта с точки зрения реализации так называемого самоподобия в рамках применения соответствующих вычислительных алгоритмов, то есть объект является рекурсивным, если его определение включает само себя и при каждой новой итерации или шаге алгоритма мы получаем выход на подобный ему объект (Свейгарт, 2023). Данный подход широко используется не только с точки зрения математики, но и информатики, во многом благодаря которой мы можем получать различные по сложности и удивительные по своей красоте геометрические структуры, называемые фракталами, образуемые в результате визуального представления рекурсивных алгоритмов (Иванов, 2025; Гашков, 2025). Отличительной особенностью рекурсии является получение новых значений исследуемых расчётных параметров рассматриваемого процесса или явления на основании имеющихся одного или нескольких предыдущих значений данных параметров согласно заранее определённому вычислительному алгоритму, например, в процессе использования численных методов решения задач (Богун, 2010; Лапчик, 2004). Необходимо отметить взаимосвязь между рекурсивным и итерационным подходами, поскольку в большинстве случаев рекурсивный подход можно реализовать с применением определённого количества циклически повторяющихся итераций с точки зрения нахождения значения необходимого рассматриваемого расчётного параметра.

Рекурсивный подход для степеней золотого числа

Золотая пропорция, рассматриваемая в качестве математического объекта, является одной из наглядных геометрических интерпретаций применения рекурсивного подхода, поскольку в данном случае при выполнении каждой из итераций мы получаем новый отрезок путём деления имеющегося в рамках предыдущей итерации отрезка в золотой пропорции таким образом, что два отрезка, получаемых в рамках двух последовательных итераций, в сумме составляют отрезок, имеющийся до начала реализации данных итераций.

Иными словами, согласно рисунку 1, изначально в рамках реализации двух первых итераций мы делим имеющийся отрезок C на два неравных отрезка A и B таким образом, что, во-первых, мы должны иметь одинаковое значение коэффициента пропорциональности с точки зрения реализации их последовательного итерационного деления, а, во-вторых, как это видно из начала формулировки, данные отрезки должны составлять единый начальный отрезок (Васютинский, 2006; Ковалев, 2016; Пидоу, 1979):

$$\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989.$$

Действительно, пусть имеем следующее соотношение: $\dfrac{C}{A} = \dfrac{A}{B} = X$.

Так как $A + B = C$ и, следовательно, $\dfrac{A}{A} + \dfrac{B}{A} = \dfrac{C}{A}$, то получим квадратное уравнение:

$$1 + \frac{1}{X} = X \Rightarrow X^2 - X - 1 = 0.$$

Получаем значение коэффициента пропорциональности в виде золотого числа:

$$X = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989.$$

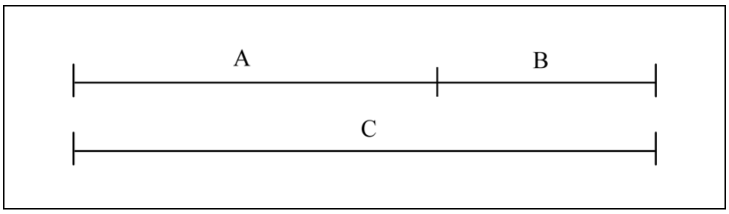

Рис. 1. Геометрическая интерпретация золотой пропорции

Получаем частный случай применения рекурсивного подхода на локальном уровне, в рамках равенства возведённого в квадрат золотого числа сумме золотых чисел, возведённых в первую и нулевую степень соответственно: $\varphi^2 = \varphi^1 + \varphi^0$ или $\varphi^2 = \varphi + 1$.

В целом, рекурсивный подход для золотого числа заключается в равенстве возведённого в определённую степень данного числа сумме золотых чисел, взятых в двух предыдущих степенях: $\varphi^N = \varphi^{N-1} + \varphi^{N-2}$ (Богун, 2010).

Очевидно, что представленное равенство аналогично выражению $\varphi^{N-2} \cdot \varphi^2 = \varphi^{N-2} \cdot \varphi + \varphi^{N-2}$, что в итоге приводит к истинному для золотого числа выражению $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Следствием данного утверждения является тот факт, что если каждый член геометрической прогрессии $X_N \left(X_1 \neq 0, q \neq 0\right)$ равен сумме двух предыдущих, то её знаменатель q равен золотому числу или φ.

Действительно, если $X_{N+2} = X_{N+1} \cdot q = X_N \cdot q^2$ и $X_{N+2} = X_{N+1} + X_N$, то $X_N \cdot q^2 = X_N \cdot q + X_N$ и $q^2 = q + 1$, что полностью отвечает свойству золотого числа, поскольку $\varphi^2 = \varphi + 1$, то есть $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Автором установлено, что золотое число является значением неизвестного параметра, отражающего равенство значения определителя квадратной матрицы второго порядка, элементы главной диагонали которой одновременно являются данным параметром, а элементы побочной диагонали одновременно равны единице, значению данного параметра.

Действительно, если имеем исходное выражение вида $\begin{vmatrix} X & 1 \\ 1 & X \end{vmatrix} = X$, то тогда получим квадратное уравнение $X \cdot X - 1 \cdot 1 = X$ или $X^2 - X - 1 = 0$.

Как было показано выше, единственно возможным положительным значением неизвестного данного уравнения является золотое число: $X = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$.

Таким образом, значение определителя квадратной матрицы второго порядка, элементы главной диагонали которой одновременно равны золотому числу, а элементы побочной диагонали одновременно равны единице, равно золотому числу: $\begin{vmatrix} \varphi & 1 \\ 1 & \varphi \end{vmatrix} = \varphi$.

Золотое число с точки зрения реализации рекурсивного подхода является пределом числовой последовательности вида $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$.

Действительно, если предел данной последовательности равен А, то имеем:

$$A = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

При возведении в квадрат обеих частей выражения, получим:

$$A^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}\right)^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} = 1 + A.$$

В итоге приходим к уравнению $A^2 = 1 + A$ или $A^2 - A - 1 = 0$.

Как было показано выше, положительным действительным решением данного уравнения является золотое число: $A = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Аналогично золотое число в рамках применения рекурсивного подхода является пределом числовой последовательности вида $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$.

Действительно, если предел данной последовательности равен B, то имеем:

$$B = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} \text{ или } B = 1+\cfrac{1}{\left(1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}\right)} = 1+\frac{1}{B}.$$

Получим уравнение $B = 1+\frac{1}{B}$ или $B^2 - B - 1 = 0$.

По аналогии с примером выше положительным действительным решением данного уравнения является золотое число: $B = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Рекурсивный подход для последовательности Фибоначчи

Последовательность Фибоначчи: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

Рекурсивный подход для последовательности Фибоначчи состоит в получении значения очередного члена через сумму двух предыдущих чисел: $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$, где F_N, F_{N-1} и F_{N-2} – члены последовательности Фибоначчи.

В соответствие с обозначенной закономерностью получаем следующую цепочку числовых выражений: $0+1=1$, $1+1=2$, $2+1=3$, $3+2=5$ и так далее.

Интересным является тот факт, что отношение значений соседних членов данной последовательности, начиная с больших номеров (при $N \to \infty$), приближается к золотому числу, то есть φ:

$$\frac{F_N}{F_{N-1}} \approx \frac{F_{N-1}}{F_{N-2}} \approx \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989.$$

Докажем данное утверждение.

Действительно:

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{F_N}{F_{N-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{N-1}+F_{N-2}}{F_{N-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{F_{N-2}}{F_{N-1}}\right) = 1+\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{N-1}}{F_{N-2}}} = 1+\frac{1}{C}.$$

Получаем уравнение $C = 1+\frac{1}{C}$ или $C^2 - C - 1 = 0$.

Тогда в качестве положительного действительного решения данного уравнения является золотое число:

$$C = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Сформулируем общее правило для степеней золотого числа и чисел последовательности Фибоначчи:

1. Формула для геометрической прогрессии золотых чисел: $\varphi^N = \varphi^{N-1} + \varphi^{N-2}$, где *«N»*, *«N–1»* и *«N–2»* – натуральные показатели степеней для золотого числа φ.

2. Формула для последовательности чисел Фибоначчи: $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$, где F_N, F_{N-1} и F_{N-2} – элементы последовательности Фибоначчи.

Выражение степеней золотых чисел с применением последовательности Фибоначчи: $\varphi^N = F_{N-1} + F_N \cdot \varphi$.

Покажем доказательство данного утверждения.

$$\varphi^1 = \varphi^0 + \varphi^{-1} = 0 + 1 \cdot \varphi = F_0 + F_1 \cdot \varphi,$$

$$\varphi^2 = \varphi^1 + \varphi^0 = \varphi + 1 = 1 + 1 \cdot \varphi = F_1 + F_2 \cdot \varphi,$$

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi^1 = (F_1 + F_2 \cdot \varphi) + (F_0 + F_1 \cdot \varphi) = (F_0 + F_1) + (F_1 + F_2) \cdot \varphi = F_2 + F_3 \cdot \varphi,$$

……………………………………………………………………………………….

$$\varphi^N = \varphi^{N-1} + \varphi^{N-2} = (F_{N-2} + F_{N-1} \cdot \varphi) + (F_{N-3} + F_{N-2} \cdot \varphi) =$$
$$= (F_{N-2} + F_{N-3}) + (F_{N-2} + F_{N-1}) \cdot \varphi = F_{N-1} + F_N \cdot \varphi.$$

Рекурсивный подход для взаимосвязанных равнобедренных треугольников

Рассмотрим применение рекурсивного подхода с точки зрения реализации геометрической интерпретации в рамках исследования равнобедренных треугольников через призму построения последовательности из данных геометрических фигур на плоскости, имеющих единый линейный элемент, через призму равенства угловых элементов, представленных в виде углов при вершинах, образованных пересечением боковых сторон и основания, исходного треугольника и угла при вершине, образованного пересечением боковых сторон, получаемого в результате итерации нового треугольника.

Автором в рамках монографии (Богун, 2013) доказано, что если рассмотреть два равнобедренных треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ с углами при основаниях $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1C_1A_1 = \alpha_1$ и $\angle B_2A_2C_2 = \angle B_2C_2A_2 = \alpha_2$, а также углами между боковыми сторонами $\angle A_1B_1C_1 = \beta_1$ и $\angle A_2B_2C_2 = \beta_2$, с учётом равенства углов при основаниях первого треугольника углу между боковыми сторонами второго треугольника, то есть $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1C_1A_1 = \alpha_1 = \angle A_2B_2C_2 = \beta_2$, можно получить две геометрические интерпретации рекурсивного подхода с точки зрения рассмотрения единого линейного элемента данных равнобедренных треугольников.

Первая теорема показывает реализацию геометрической интерпретации рекурсивного подхода применительно к исследованию равнобедренных треугольников, рассматриваемых через призму обозначенного выше равенства угловых элементов, имеющих единую основную высоту, заключается в совпадении центров вписанной и описанной окружностей соответственно для данных треугольников, что наглядным образом отражено на рис. 2.

Доказательство теоремы основывается на том, что согласно предварительным выкладкам автора, между линейными элементами рассматриваемых равнобедренных треугольников $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ существуют пропорциональные зависимости:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{R_2}{(h-r)_1} = \frac{(h-R)_2}{r_1} = \frac{(D-h)_2}{(h-d)_1}.$$

Так как согласно условию теоремы $\frac{h_2}{h_1} = 1$ или $h_1 = h_2$, то получим:

$$\frac{R_2}{(h-r)_1} = \frac{h_2}{h_1} = 1 \Rightarrow R_2 = (h-r)_1 \Rightarrow h_1 = r_1 + R_2 .$$

$$\frac{(h-R)_2}{r_1} = \frac{h_2}{h_1} = 1 \Rightarrow (h-R)_2 = r_1 \Rightarrow h_2 = r_1 + R_2 .$$

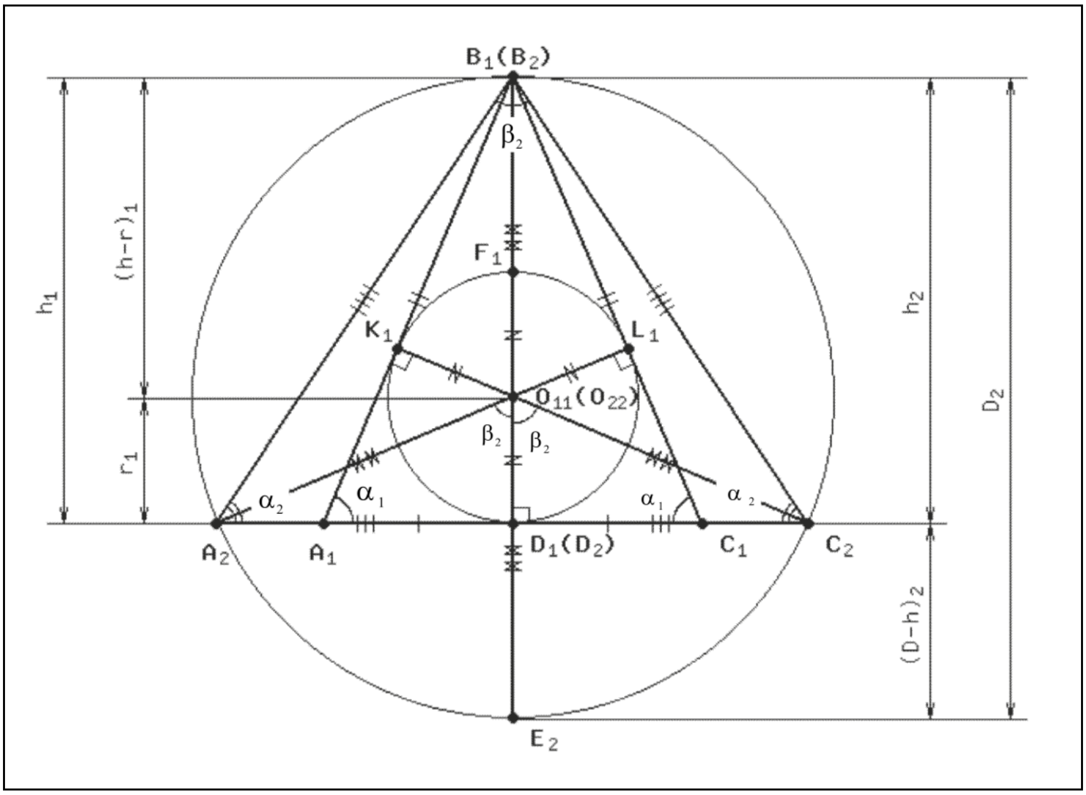

Рис. 2. Геометрическая интерпретация первой теоремы

Поскольку основные высоты треугольников $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ совпадают, то есть совпадают точки $B_1 = B_2$ и $D_1 = D_2$, а также равны величины линейных элементов $B_1D_1 = B_2D_2$ ($h_1 = h_2$), которые равны сумме радиусов вписанной в треугольник $\Delta A_1B_1C_1$ окружности ($D_1O_{11} = r_1$) и описанной вокруг треугольника $\Delta A_2B_2C_2$ окружности $(B_2O_{22} = R_2)$ или $B_1D_1 = B_2D_2 = D_1O_{11} + B_2O_{22}$ ($h_1 = h_2 = r_1 + R_2$), то центр вписанной в треугольник $\Delta A_1B_1C_1$ окружности (O_{11}) и центр описанной вокруг треугольника $\Delta A_2B_2C_2$ окружности (O_{22}) совпадают ($O_{11} = O_{22}$).

Вторая теорема показывает реализацию геометрической интерпретации рекурсивного подхода применительно к исследованию равнобедренных треугольников, рассматриваемых через призму обозначенного выше равенства угловых элементов, имеющих единое основание, заключается в прохождении описанной окружности исходного треугольника через центр описанной окружности нового треугольника и в прохождении описанной окружности нового треугольника через центр вписанной окружности исходного треугольника, что наглядным образом отражено на рис. 3.

Доказательство теоремы основывается на том, что согласно предварительным доказательствам автора, между линейными элементами рассматриваемых равнобедренных треугольников $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ существуют пропорциональные зависимости:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{(h-R)_2}{(D-h)_1} = \frac{(D-h)_2}{r_1} .$$

Так как согласно условию теоремы $\frac{a_2}{a_1} = 1$ или $a_1 = a_2$, то получим:

$$\frac{(h-R)_2}{(D-h)_1} = \frac{a_2}{a_1} = 1 \Rightarrow (h-R)_2 = (D-h)_1 \Rightarrow D_1 = h_1 + (h-R)_2 .$$

$$\frac{(D-h)_2}{r_1} = \frac{a_2}{a_1} = 1 \Rightarrow (D-h)_2 = r_1 \Rightarrow D_2 = h_2 + r_1 .$$

Поскольку основания треугольников $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ совпадают, то есть верно равенство $A_1D_1 = C_1D_1 = A_2D_2 = C_2D_2$ ($a_1 = a_2$) и совпадают точки $A_1 = A_2$, $C_1 = C_2$ и $D_1 = D_2$, а диаметр описанной вокруг треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ окружности ($B_1E_1 = D_1$) определяется как сумма его основной высоты ($B_1D_1 = h_1$) и разности между основной высотой и радиусом описанной окружности ($D_2O_{22} = (h-R)_2$) треугольника $\Delta A_2B_2C_2$, то есть выполняется равенство $B_1E_1 = B_1D_1 + D_2O_{22}$ ($D_1 = h_1 + (h-R)_2$), то точка пересечения описанной окружности с основной высотой (E_1) треугольника $\Delta A_1B_1C_1$ совпадает с центром описанной вокруг треугольника $\Delta A_2B_2C_2$ окружности (O_{22}), то есть выполняется равенство $E_1 = O_{22}$.

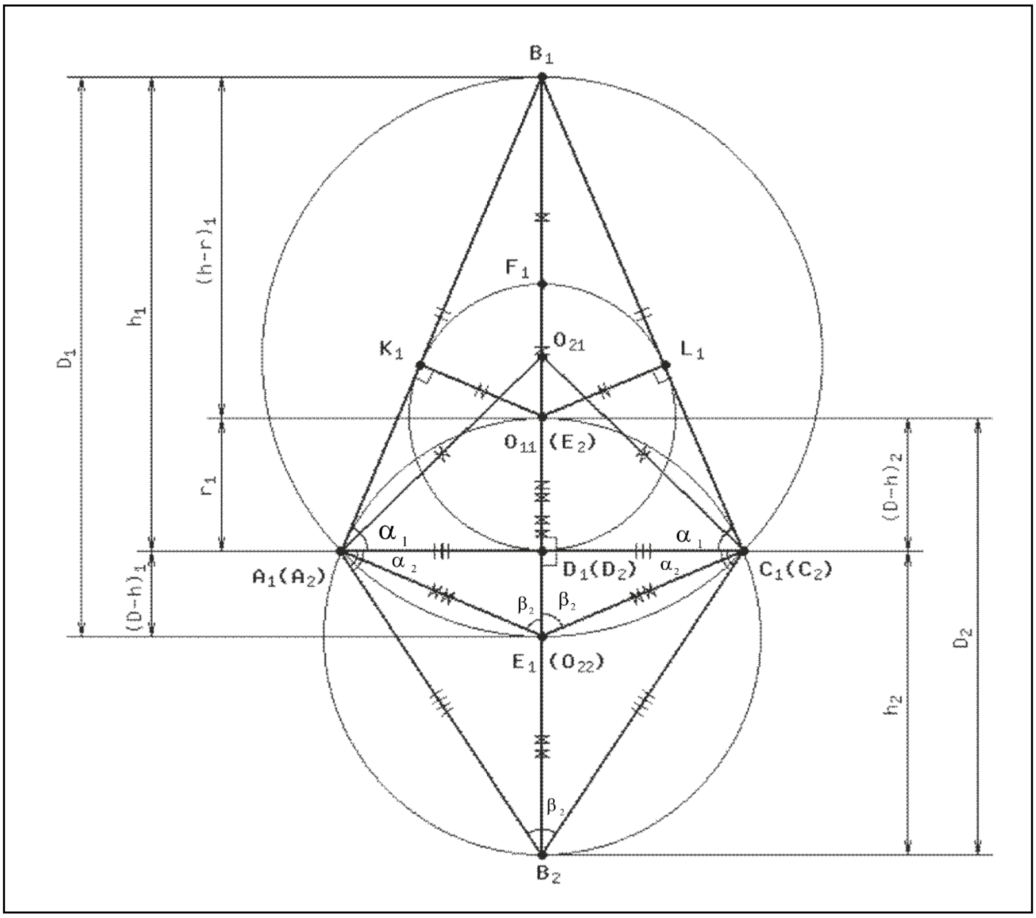

Рис. 3. Геометрическая интерпретация второй теоремы

Поскольку основания треугольников $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ совпадают, то есть верно равенство $A_1D_1 = C_1D_1 = A_2D_2 = C_2D_2$ ($a_1 = a_2$) и совпадают точки $A_1 = A_2$, $C_1 = C_2$ и

$D_1 = D_2$, а диаметр описанной вокруг треугольника $\Delta A_2B_2C_2$ окружности ($B_2E_2 = D_2$) определяется как сумма его основной высоты ($B_2D_2 = h_2$) и радиуса вписанной в треугольник $\Delta A_1B_1C_1$ окружности ($D_1O_{11} = r_1$), то есть выполняется равенство $B_2E_2 = B_2D_2 + D_1O_{11}$ ($D_2 = h_2 + r_1$), то точка пересечения описанной окружности с основной высотой (E_2) треугольника $\Delta A_2B_2C_2$ совпадает с центром вписанной в треугольник $\Delta A_1B_1C_1$ окружности (O_{11}), то есть верно равенство $E_2 = O_{11}$.

Интеграция рекурсивного подхода для алгебраических и геометрических структур

Покажем применение рекурсивного подхода в рамках интеграции алгебраических и геометрических структур с точки зрения адаптации золотых чисел к исследованию формируемой последовательности взаимосвязанных равнобедренных треугольников на плоскости с учётом как равенства углов при основании треугольника, имеющегося до выполнения итерации, углу между боковыми сторонами получаемого в результате итерации треугольника, так и наличия у данных двух треугольников общего линейного элемента.

Рассмотрим «золотой» треугольник, который по своей сути является равнобедренным треугольником, у которого отношение боковой стороны к половине основания определяется через золотое число, что отражено на рис. 4.

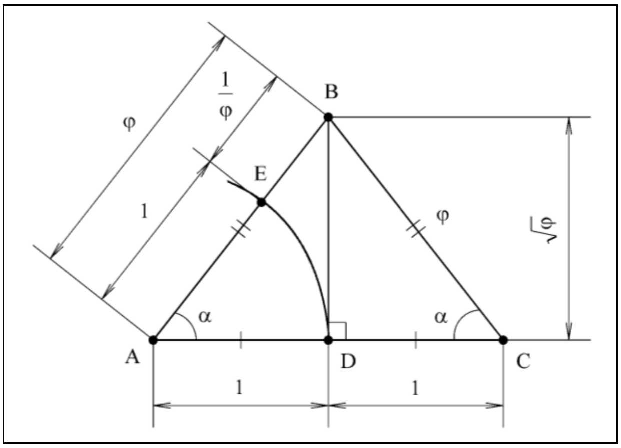

Рис. 4. Золотой треугольник

Автором в рамках указанной выше монографии для золотого треугольника показаны следующие две версии получения непосредственно золотой пропорции с точки зрения отношения линейных элементов.

Во-первых, для золотого треугольника золотая пропорция выражается через отношение линейных компонентов, получаемых в результате деления основной высоты центром вписанной окружности, что наглядным образом продемонстрировано на рис. 5.

Согласно указанным ранее обозначениям, получаем следующее равенство, отражающее сформулированную пропорциональную зависимость:

$$\frac{h}{h-r} = \frac{h-r}{r}.$$

Автором предварительно доказаны следующие отношения между линейными элементами с применением тригонометрических функций от равных углов при основании треугольника: $\dfrac{h}{h-r} = 1 + \cos\alpha$ и $\dfrac{h-r}{r} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Тогда для соблюдения равенства с точки зрения отношений линейных элементов треугольника имеем следующее тригонометрическое уравнение: $1+\cos\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

При решении получаемого тригонометрического уравнения $\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$ имеем положительный действительный корень уравнения $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{1}{\varphi}$, что характерно только для исследуемого золотого треугольника.

Таким образом, для золотого треугольника верна цепочка равенств:

$$\frac{h}{h-r} = \frac{h-r}{r} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\cos\alpha} = \varphi .$$

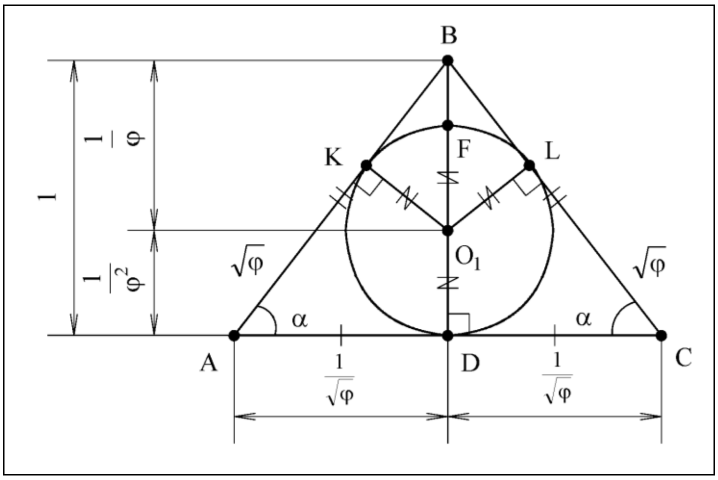

Рис. 5. Деление основной высоты золотого треугольника в золотой пропорции

Во-вторых, для золотого треугольника золотая пропорция выражается через отношение линейных компонентов, получаемых в результате деления диаметра описанной окружности центром основания, что наглядным образом продемонстрировано на рис. 6.

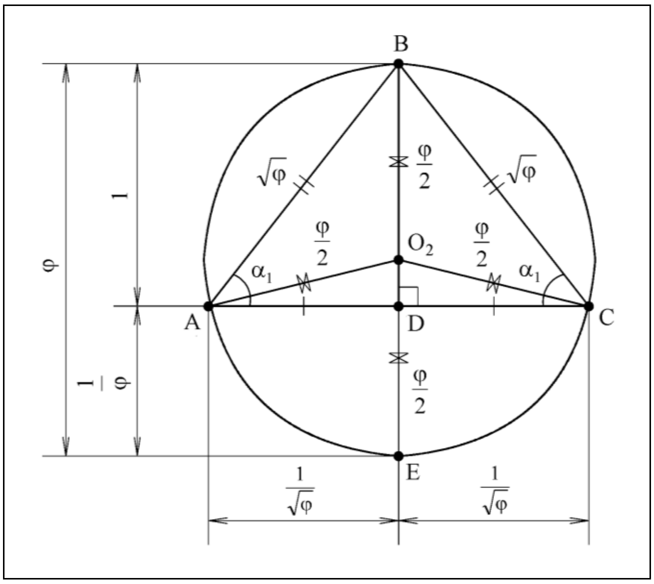

Рис. 6. Деление диаметра описанной окружности золотого треугольника в золотой пропорции

Согласно указанным ранее обозначениям, получаем следующее равенство, отражающее сформулированную пропорциональную зависимость:

$$\frac{D}{h}=\frac{h}{D-h}.$$

Автором предварительно доказаны следующие отношения между линейными элементами с применением тригонометрических функций от равных углов при основании треугольника: $\frac{D}{h}=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{1-\cos^2\alpha}$ и $\frac{h}{D-h}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Тогда для соблюдения равенства с точки зрения отношений линейных элементов треугольника получаем следующее тригонометрическое уравнение: $\cos^2\alpha=\left(1-\cos^2\alpha\right)^2$.

Получим уравнение $\cos^2\alpha=\left(1-\cos^2\alpha\right)^2$, которое приводится к уравнению вида $\cos^4\alpha-3\cos^2\alpha+1=0$.

При решении обозначенного уравнения получим необходимый действительный корень уравнения: $\cos^2\alpha=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1-\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\varphi^2}$, откуда имеем $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1}{\varphi}$, что характерно только для золотого треугольника.

Таким образом, для золотого треугольника верна цепочка равенств:

$$\frac{D}{h}=\frac{h}{D-h}=\frac{b}{a}=\frac{1}{\cos\alpha}=\varphi.$$

С точки зрения золотого треугольника первая теорема, показывающая реализацию геометрической интерпретации рекурсивного подхода применительно к исследованию равнобедренных треугольников, рассматриваемых через призму равенства обозначенных в теореме характерных углов треугольников, имеющих единую основную высоту, заключается, как было указано выше, в совпадении центров вписанной и описанной окружностей соответственно для данных треугольников, а также, в рамках представления золотого треугольника в качестве исходного равнобедренного треугольника, в выражении золотой пропорции через отношение линейных компонентов, получаемых в результате деления вершинами при основании нового треугольника половин основания исходного треугольника, что наглядным образом продемонстрировано на рис. 7.

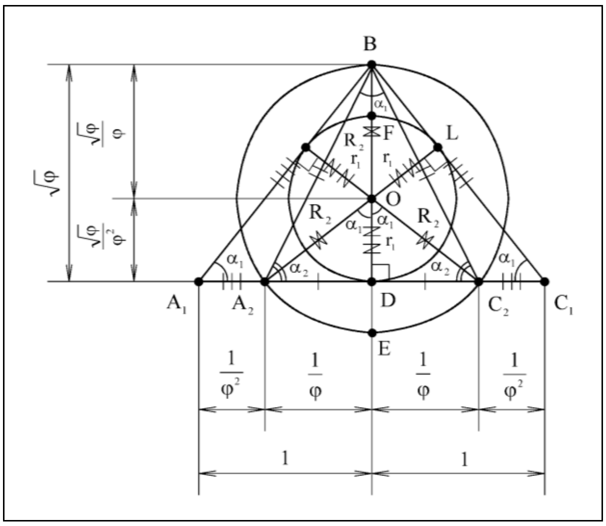

Рис. 7. Применение первой теоремы к золотому треугольнику

Согласно указанным ранее обозначениям, получаем следующее равенство, отражающее сформулированную пропорциональную зависимость:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_1 - a_2}.$$

Автором в рамках проведения дальнейшего исследования описанной выше первой теоремы предварительно доказаны следующие отношения между линейными элементами обозначенных равнобедренных треугольников с применением тригонометрических функций от равных углов при основаниях треугольников: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\cos\alpha_1}{1-\cos\alpha_1}$ и $\frac{a_2}{a_1 - a_2} = \frac{1-\cos\alpha_1}{2\cos\alpha_1 - 1}$.

Тогда для соблюдения обозначенного равенства с точки зрения отношений линейных элементов треугольников получаем следующее тригонометрическое уравнение:

$$\cos\alpha_1 \cdot (2\cos\alpha_1 - 1) = (1-\cos\alpha_1)^2 \text{ или } \cos^2\alpha_1 + \cos\alpha_1 - 1 = 0.$$

Решая имеющееся уравнение, получаем положительное значение косинуса угла при основании первого равнобедренного треугольника $\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$, что является признаком исключительно золотого треугольника.

Таким образом, применение первой теоремы для рассматриваемых равнобедренных треугольников с точки зрения золотого треугольника приводит к получению следующей цепочки равенств:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_1 - a_2} = \frac{1}{\cos\alpha_1} = \varphi.$$

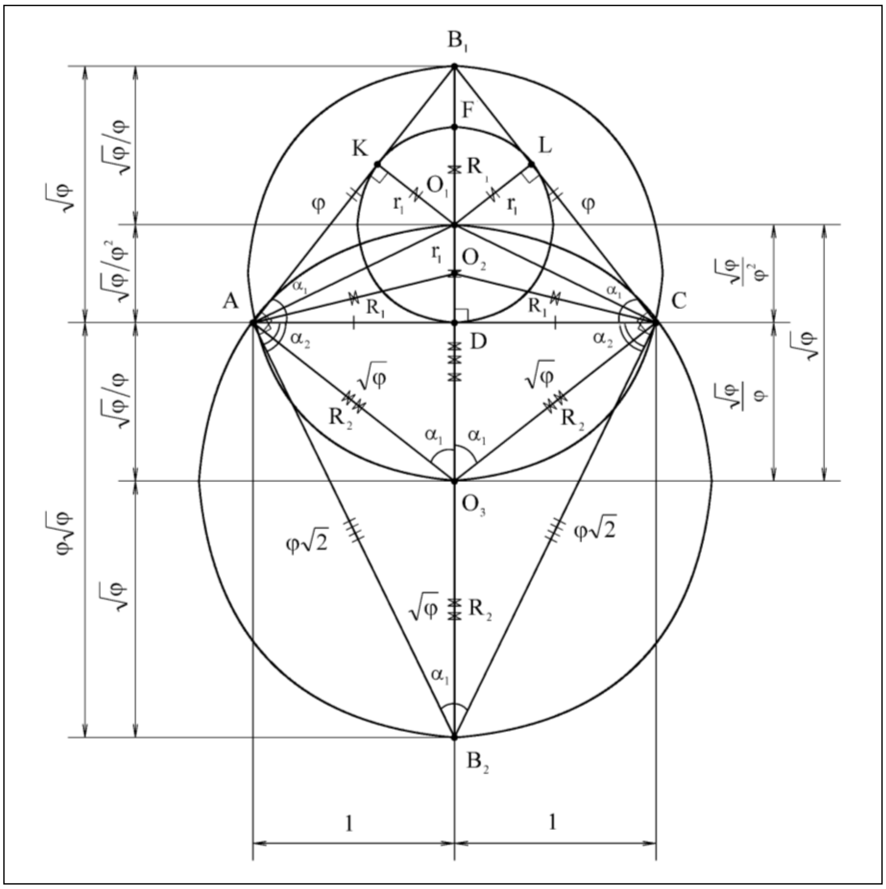

Рис. 8. Применение второй теоремы к золотому треугольнику

С точки зрения золотого треугольника вторая теорема, показывающая реализацию геометрической интерпретации рекурсивного подхода применительно к исследованию равнобедренных треугольников, рассматриваемых через призму равенства обозначенных в теореме характерных углов треугольников, имеющих единое основание, заключается, как было указано выше, в прохождении описанной окружности исходного треугольника через центр описанной окружности нового треугольника и в прохождении описанной окружности нового треугольника через центр вписанной окружности исходного треугольника, а также, в рамках представления золотого треугольника в качестве исходного равнобедренного треугольника, в выражении золотой пропорции через отношение линейных компонентов, получаемых в результате деления, во-первых, общей половины основания совокупности основных высот треугольников, во-вторых, центра описанной окружности нового треугольника его основной высоты, и, в-третьих, общей половины основания совокупности радиуса вписанной окружности исходного треугольника и радиуса описанной окружности нового треугольника, что наглядным образом представлено на рис. 8.

Для доказательства первого случая получаем следующее равенство, отражающее сформулированную пропорциональную зависимость:

$$\frac{h_2 + h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Автором в рамках проведения исследования второй теоремы предварительно были доказаны следующие отношения:

$$\frac{h_2 + h_1}{h_2} = \frac{1}{\cos\alpha_1} \text{ и } \frac{h_2}{h_1} = \frac{\cos\alpha_1}{1-\cos\alpha_1}.$$

При решении получаемого тригонометрического уравнения $1-\cos\alpha_1 = \cos^2\alpha_1$ или $\cos^2\alpha_1 + \cos\alpha_1 - 1 = 0$, имеем подходящее адекватное значение корня уравнения $\cos\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{1}{\varphi}$, что свойственно только золотому треугольнику.

Таким образом, для первого случая применение второй теоремы для рассматриваемых равнобедренных треугольников с точки зрения золотого треугольника приводит к получению следующей цепочки равенств:

$$\frac{h_2 + h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{\cos\alpha_1} = \varphi.$$

Для доказательства второго случая получаем уже другое равенство, отражающее сформулированную пропорциональную зависимость:

$$\frac{h_2}{R_2} = \frac{R_2}{(h-R)_2}.$$

Автором в рамках проведения исследования второй теоремы предварительно по аналогии с первым случаем также были доказаны следующие отношения между линейными элементами треугольников:

$$\frac{h_2}{R_2} = 2\sin^2\alpha_2 = 1+\cos\alpha_1 \text{ и } \frac{R_2}{(h-R)_2} = \frac{1}{\cos\alpha_1}.$$

Тогда получаем следующее тригонометрическое уравнение:

$$1+\cos\alpha_1 = \frac{1}{\cos\alpha_1} \text{ или } \cos^2\alpha_1 + \cos\alpha_1 - 1 = 0.$$

При решении тригонометрического уравнения получаем подходящее адекватное значение корня уравнения $\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$, что аналогично свойственно только золотому треугольнику.

Таким образом, для второго случая применение второй теоремы для рассматриваемых равнобедренных треугольников с точки зрения золотого треугольника приводит к получению следующей цепочки равенств:

$$\frac{h_2}{R_2} = \frac{R_2}{(h-R)_2} = \frac{1}{\cos\alpha_1} = \varphi.$$

Для доказательства третьего случая получаем равенство, отражающее соответствующую сформулированную пропорциональную зависимость:

$$\frac{r_1+R_2}{R_2} = \frac{R_2}{r_1}.$$

Перепишем данное равенство в следующем виде:

$$\frac{r_1}{R_2} + 1 = \frac{R_2}{r_1} \text{ или } \frac{r_1}{a_1}\cdot\frac{a_1}{R_2} + 1 = \frac{a_1}{r_1}\cdot\frac{R_2}{a_1}.$$

Поскольку по условию второй теоремы равнобедренные треугольники имеют общее основание, получаем равенство:

$$\frac{r_1}{a_1}\cdot\frac{a_2}{R_2} + 1 = \frac{a_1}{r_1}\cdot\frac{R_2}{a_2}.$$

Автором предварительно выведены следующие равенства:

$$\frac{r_1}{a_1} = \frac{\sin\alpha_1}{1+\cos\alpha_1} \text{ и } \frac{a_2}{R_2} = \sin(2\alpha_2) = \sin\alpha_1.$$

Тогда $\frac{r_1}{a_1}\cdot\frac{a_2}{R_2} = \frac{\sin\alpha_1}{1+\cos\alpha_1}\cdot\sin\alpha_1 = \frac{\sin^2\alpha_1}{1+\cos\alpha_1} = \frac{1-\cos^2\alpha_1}{1+\cos\alpha_1} = 1-\cos\alpha_1$.

Имеем следующее тригонометрическое уравнение:

$$2-\cos\alpha_1 = \frac{1}{1-\cos\alpha} \text{ или } (2-\cos\alpha_1)\cdot(1-\cos\alpha_1) = 1.$$

В итоге получаем тригонометрическое уравнение $\cos^2\alpha_1 + 3\cos\alpha_1 - 1 = 0$.

При решении обозначенного уравнения получим адекватный положительный действительный корень уравнения $\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$, что опять же характерно только для золотого треугольника.

Таким образом, для второго случая применение второй теоремы для рассматриваемых равнобедренных треугольников с точки зрения золотого треугольника приводит к получению следующей цепочки равенств:

$$\frac{r_1+R_2}{R_2} = \frac{R_2}{r_1} = \frac{1}{\cos\alpha_1} = \varphi.$$

Заключение

Таким образом, в исследовании показана реализация рекурсивных алгоритмов, широко применяемых в рамках математики и информатики, с точки зрения как алгебраических структур в виде степеней золотого числа и числе Фибоначчи, так и геометрических структур в виде сочетаний равнобедренных треугольников на плоскости, для которых равные углы при основании одного треугольника равны углу между боковыми сторонами второго треугольника, при этом как на уровне алгебры, так и геометрии мы можем наблюдать фактически бесконечное преобразование чисел или равнобедренных треугольников соответственно согласно обозначенным закономерностям, что, по своей сути, является полным отражением рекурсивного подхода согласно его алгоритмической составляющей.

Также возможна интеграция алгебраических и геометрических структур через призму исследования золотого треугольника с точки зрения рассмотрения применения золотой пропорции к нахождению пропорциональных зависимостей между двумя равнобедренными треугольниками с равенством углов при основаниях одного треугольника углу между боковыми сторонами второго треугольника при условии, что первый треугольник является золотым треугольником.

Показано авторское применение рекурсивного подхода через призму исследования последовательностей равнобедренных треугольников, имеющих единый общий линейный элемент, с соблюдением равенства угловых элементов в ракурсе соответствия угла между боковыми сторонами нового треугольника, получаемого вследствие реализации очередной итерации, углу при основании имеющегося равнобедренного треугольника, при этом рассматриваются как общие случаи, так и частные случаи в рамках исследования золотого треугольника.

Список литературы

Богун В.В., Смирнов Е.И. Лабораторный практикум по математике с графическим калькулятором: Учебное пособие. Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2010.

Богун В.В. Тригонометрический анализ равнобедренных треугольников с применением информационных технологий: монография. Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2013.

Васютинский Н.А. Золотая пропорция. СПб: Изд-во «ДИЛЯ», 2006.

Гашков С.Б., Фролов А.Б. Дискретная математика: учебник и практикум для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2025. (Высшее образование). Текст: электронный / Образовательная платформа Юрайт [сайт]. URL: https://urait.ru/bcode/560607 (дата обращения: 10.07.2025).

Иванов Б. Н. Дискретная математика и теория графов: учебник для вузов. М.: Издательство Юрайт, 2025. (Высшее образование). Текст: электронный / Образовательная платформа Юрайт [сайт]. URL: https://urait.ru/bcode/567929 (дата обращения: 10.07.2025).

Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи: учебное пособие. М.: РИП-холдинг, 2016.

Лапчик, М.П., Рагулина, М.И., Хеннер, Е.К. Численные методы: Учебное пособие для студ. вузов: учебное пособие. М.: Издательский центр «Академия», 2004.

Пидоу Д. Геометрия и искусство. М.: Мир, 1979.

Свейгарт Эл. Рекурсивная книга о рекурсии. СПб: Питер, 2023.

APPLICATION OF A RECURSIVE APPROACH TO THE STUDY OF ISOSCELES TRIANGLES ON THE PLANE

Bogun V. V.
Ph.D (Pedagogy), Associate Professor
vvvital@mail.ru
Yaroslavl

Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky

Abstract. The recursive approach is a method by which a sufficiently large number of objects of animate and inanimate nature are structurally considered through the prism of multiple or infinite self-embedding according to certain patterns. From the point of view of algebraic structures, the recursive method is applied within the framework of considering the formation of powers of the golden number or Fibonacci numbers, whereas within the framework of plane geometry, the most obvious application of the recursive approach is various types of fractals that can reflect the structures of various objects of the surrounding reality. This article presents both generally accepted aspects of the implementation of the recursive approach from the point of view of algebra, and the author's application of the approach under consideration through the prism of studying sequences of isosceles triangles that have a single linear element, through the prism of equality of angular elements presented in the form of angles at the vertices formed by the intersection of the sides and the base of the original triangle and the angle at the vertex formed by the intersection of the sides obtained as a result of the iteration of the new triangle. The use of the geometric interpretation of the recursive approach formulated by the author is shown in relation to the study of the properties of the golden triangle. The golden ratio can be comprehensively studied by students as a unique mathematical object during the process of studying mathematics.

Keywords: teaching mathematics, recursive approach, golden number, Fibonacci sequence, sequence of isosceles triangles, golden triangle.

References

Bogun, V. V., Smirnov, E. I. (2010). *Laboratornyj praktikum po matematike s graficheskim kal'kulyatorom: Uchebnoe posobie*. Yaroslavl': Izd-vo «Kancler». (In Russ.)

Bogun, V. V. (2013). *Trigonometricheskij analiz ravnobedrennyh treugol'nikov s primeneniem informacionnyh tekhnologij: monografiya*. Yaroslavl': Izd-vo «Kancler». (In Russ.)

Gashkov, S. B., Frolov, A. B. (2025). *Diskretnaya matematika: uchebnik i praktikum dlya vuzov*. 4-e izd., pererab. i dop. Moskow: Izdatel'stvo Yurajt, (Vysshee obrazovanie). Tekst: elektronnyj / Obrazovatel'naya platforma Yurajt [sajt]. URL: https://urait.ru/bcode/560607 (data obrashcheniya: 10.07.2025). (In Russ.)

Ivanov, B. N. (2025). *Diskretnaya matematika i teoriya grafov: uchebnik dlya vuzov*. Moskow: Izdatel'stvo Yurajt, (Vysshee obrazovanie). Tekst: elektronnyj / Obrazovatel'naya platforma Yurajt [sajt]. URL: https://urait.ru/bcode/567929 (data obrashcheniya: 10.07.2025). (In Russ.)

Kovalev, F. V. (2016). *Zolotoe sechenie v zhivopisi: uchebnoe posobie*. Moskow: RIP-holding. (In Russ.)

Lapchik, M. P., Ragulina, M. I., Henner, E .K. (2004). *Chislennye metody: Ucheb. posobie dlya stud. vuzov: ucheb. posobie*. Moscow: Izdatel'skij centr «Akademiya». (In Russ.)

Pidou, D. (1979). *Geometriya i iskusstvo*. Moscow: Mir. (In Russ.)

Svejgart, El. (2023). *Rekursivnaya kniga o rekursii*. SPb: Piter. (In Russ.)

Vasyutinskij, N. A. (2006). *Zolotaya proporciya*. SPb: Izd-vo «DILYa». (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 17.07.2025
Принята к публикации 19.08.2025