DOI: 10.24888/2500-1957-2025-3-23-30

УДК 372.851

ЗАДАЧИ С «НЕОЖИДАННЫМ ОТВЕТОМ» И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ

Ветошкина Елена Сергеевна
к.п.н., доцент
elena.vetoshkina@mail.ru
г. Коломна
Государственный социально-гуманитарный университет

Леонова Жанна Константиновна
д.э.н., профессор
zh_leonova@mail.ru
г. Коломна
Государственный социально-гуманитарный университет

Хэкало Сергей Павлович
д.ф.-м.н., профессор
khekalo@mail.ru
г. Коломна
Государственный социально-гуманитарный университет

Аннотация. Современная цифровая трансформация общества и следующая за ней реструктуризация содержания образования диктуют новые задачи организации учебного процесса. Одной из таких глобальных задач выступает проблема зарождения и взросления функциональной грамотности школьников, в частности, математической. В настоящее время однозначного подхода к описанию технологий формирования компетенций функциональной математической грамотности (ФМГ) нет. Естественным, как нам видится, представляется простой и давно проверенный способ Дьёрдь Пойа «Если хотите научиться решать задачи, то решайте их!». В этой связи в настоящей заметке предлагается поразмышлять над следующими вопросами: что такое задача с «неожиданным ответом», как такие задачи возникают, какова их необходимость в формировании ФМГ? Приводятся и обсуждаются пять подобных теоретических и практических задач с различной «генетикой в рождении неожиданности» в ответе. Изучение и решение этих задач несомненно положительно влияет на динамику формирования ФМГ школьников и на совершенствование кругозора учителей математики.

Ключевые слова: математическая грамотность, функциональная математическая грамотность, задачи с неожиданным ответом.

Благодарности: Авторы благодарны учителям и школьникам, давшим критические замечания на материал, публикуемый в этой заметке.

«*Ошибки* составляют не менее важную часть *математики*, чем доказательства»

В.И. Арнольд, акад. РАН, из книги «Что такое математика?»

Введение

Уже более двадцати лет Институтом стратегии развития образования (ныне Институт содержания и методов обучения) Российской академии образования реализуется весьма значимый и необходимый для учителей и учащихся проект «Мониторинг формирования функциональной грамотности учащихся». Стоит отметить, что его цель не только в мониторинге, но и в учебно-методической помощи всем тем, кто решился узнать о функциональной грамотности и, в частности, о функциональной математической грамотности (Сайт ИСМО Минпроса РФ, 2025).

Подхватив идеи сотрудников Института стратегии развития образования, многие методисты ввели в практику преподавания школьного курса математики задачи с практическим содержанием, а что более важно – элементы научно-проектной деятельности, позволяющие учащемуся не только показать свои математические способности и их применение, но и стать творцом новых задач и новых идей. Это значимое для развития детей творчество породило ряд задач, на первый взгляд, тривиальных и непримечательных. Однако, на самом деле, их тривиальность только кажущаяся!

Приведём примеры таких заданий в целях знакомства читателей с задачами с «неожиданным ответом» и обсуждения необходимости изучения школьниками таких примеров.

Результаты

Для начала дадим определения (Миклашевич, 2021).

Определение 1. *Математическая грамотность школьника – система его знаний, умений, навыков и универсальных учебных действий в области математики.*

Определение 2. *Функциональная математическая грамотность школьника – его умение использовать математическую грамотность и личный жизненный опыт для решения широкого диапазона задач в различных сферах человеческой деятельности.*

Если учитель принимает оба эти определения как руководство к действию, то вся его работа со школьниками должна постоянно сопровождаться методической парадигмой: «изучили теорию → отработали на тренажёре → показали жизненное применение → сами применили в жизни». А реальная жизнь, как известно, полна неожиданностей и сюрпризов. Например, Анна Элеонора Рузвельт пишет: «Опыт учит нас, что случается всегда неожиданное!» Исходя из этого, дадим ещё одно определение.

Определение 3. *Будем называть задачу «задачей с неожиданным ответом», если при её формулировке автор, по-видимому, рассчитывал получить ответ (решение), который (которое) на самом деле оказался (оказалось) другим (принципиально другим).*

Искушённый читатель, конечно, подвергнет критике это определение – что за «по-видимому»?!

Поясним. К такой задаче автором приведён либо правильный ответ с потенциально неправильным решением, либо ошибочный ответ (и дело не в невнимательности), либо приведено подмножество верных ответов, не совпадающее с множеством верных ответов.

Исходя из нашей практики, отметим, что такие задачи просто необходимы для учащихся: можно развивать их креативное мышление, предположив, что имел в виду автор, составляя эти задачи (Хэкало, 2020, 73-75); направить учащегося на применение глобальных компетенций, сообщив ему, что эта задача – задача с неожиданным ответом (Хэкало, 2020, 48-51); развивать у детей задатки ФМГ, организовав всего лишь на примере одной такой задачи целый научно-исследовательский проект (Колесова, 2023).

Перейдём к рассмотрению примеров.

Пример 1. Запишите три следующих числа последовательности: 3; 6; 11; 18; 27; ...; ...; ... . Ответ (из пособия на сайте): 38; 51; 66.

Почему эта задача подпадает под Определение 3? Тут есть ряд причин: теоретическая – конечную подпоследовательность продолжить однозначно нельзя (но детям долго надо объяснять теорию, да и зачем это нужно?!); практическая, более интересная, – давайте «наполним» эту или аналогичную задачу жизнью. Пусть, например, температура воздуха в первые пять дней марта составляла 1℃, 2℃, 3℃, 4℃ и 5℃. Какая температура воздуха будет в следующие три дня марта? Ответ. Любая (допустимая)! Могли ударить морозы или наступить оттепель! (Хэкало, 2020, 73-75).

Итак, это теоретическая задача с неожиданным ответом (приведён только один верный ответ из всего бесконечного множества правильных ответов), польза которой несомненна. Задачу можно перенести в жизненную плоскость, применив навыки ФМГ и организовав проект: теоретический – «Что такое последовательность, и как она задаётся?» или практический – «Последовательности в статистических наблюдениях».

Пример 2. В классе 26 учащихся, среди них два друга – Андрей и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Решение. Пусть один из друзей находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 12 человек из 25 оставшихся одноклассников. Вероятность того, что второй друг окажется среди этих 12 человек, равна $p = 12/25 = 0{,}48$.

Ответ: $p = 0{,}48$.

Итак, это практическая задача с неожиданным ответом. Приведён правильный ответ с потенциально неправильным решением. Для решения задачи использована формула классической вероятности и, судя по решению, не описана суть соответствующего случайного эксперимента (а в этом её практическое содержание). Неверно определено количество элементарных исходов поставленного эксперимента и количество благоприятных элементарных исходов. Польза указанной задачи также несомненна: во-первых, не все коллеги при решении задачи из области теории вероятностей вспоминают и/или оговаривают условия и результаты случайного эксперимента, а это надо делать обязательно; во-вторых, из этой одной задачи можно подготовить целый проект (Хэкало, 2020, 48-51).

Пример 3. (фактически известна как «задача Арнольда»). Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 м и высотой 6 м, опущенной на гипотенузу из вершины прямого угла.

Эта теоретическая задача с неожиданным ответом (конечно, автор её решает правильно, но большинство детей и множество учителей попадаются на весёлую манящую приманку – «всё легко»!). Неожиданность ответа, по-видимому, продиктована отсутствием или слабым присутствием компетенций по ФМГ: алгебраическая часть математической грамотности и простая человеческая психология быстро срабатывают и дают путь неправильного решения:

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30\ (\text{м}^2).$$

ФМГ, на основе анализа задачи, подсказывает – такого треугольника не существует.

Эта задача не менее полезна, чем остальные. Работа (Колесова, 2023) тому в подтверждение: школьник ходил на кружок, услышал про эту задачу и про несколько подобных, и у него с учителем появился интересный проект по ФМГ.

Пример 4 (Петерсон, 2022). Зачеркните лишний цветок среди изображённых на рисунке.

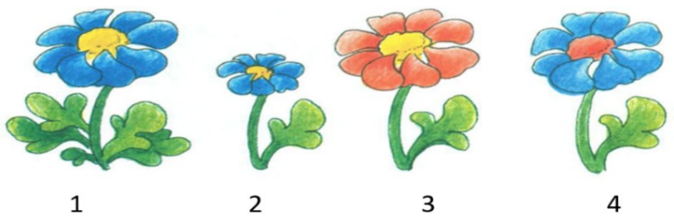

Рис. 1. Цветы-1

Это задача с практическим содержанием и, без сомнения, – с неожиданным ответом. Неожиданность в ответе продиктована неоднозначным пониманием слова «лишний» и, тем самым, неоднозначностью в выборе алгоритмического условия на «лишний» цветок. Но даже если ребенок (и/или взрослый) придёт к нескольким условиям, согласно которым определяется этот самый «лишний» цветок, то в конце «решения» его может ожидать интересный сюрприз – а какой ответ вообще правильный?!

Подробнее, если выбрано условие «высота стебля», то «лишним» является цветок №2:

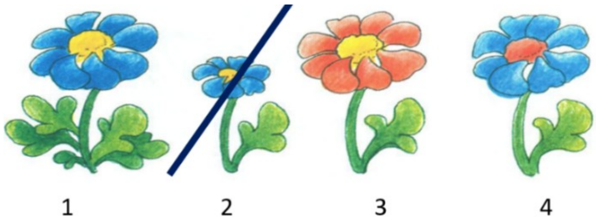

Рис. 2. Цветы-2

если выбрано условие «цвет лепестков», то «лишним» является цветок № 3:

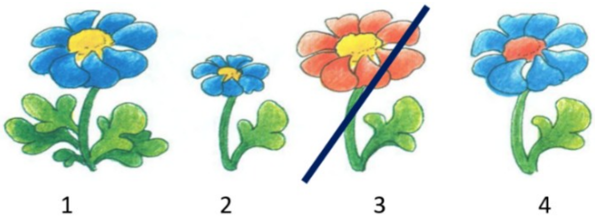

Рис. 3. Цветы-3

если выбрано условие «количество листьев», то «лишним» является цветок № 1:

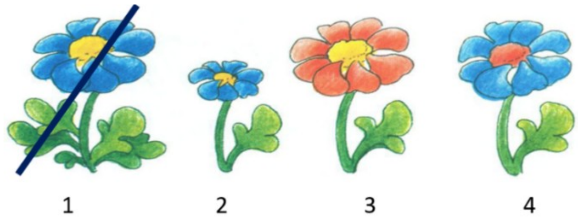

Рис. 4. Цветы-4

если выбрано условие «цвет сердцевины», то «лишним» является цветок № 4.

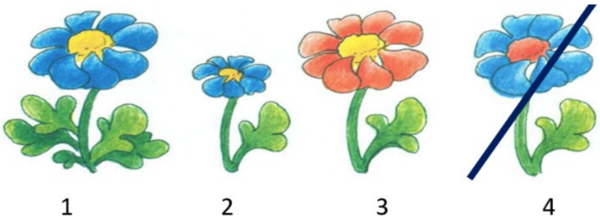

Рис. 5. Цветы-5

Итак, кажется правдоподобным дать ответ – «все цветы на рисунке – лишние».

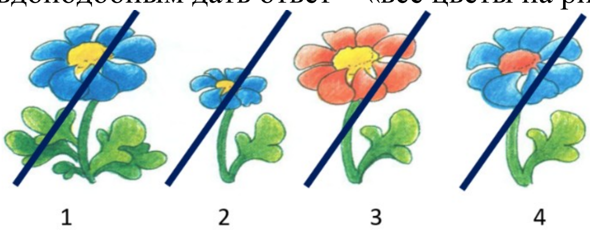

Рис. 6. Цветы-6

Однако в природе «лишних» не бывает, и можно дать вполне неожиданный ответ – нет нужды зачеркивать!

На наш взгляд, это очень красивая и нужная задача не только для дошколят (кому её адресовали авторы), но и для учителей математики основной школы. Выбор алгоритмов перебора, равновероятные условия выбора, неопределённость (неоднозначность) в выборе ответа с точки зрения функциональной грамотности и глобальных компетенций – всё это можно отработать на одной задаче, развивая кругозор учащихся и их правильное понимание ответа на вопрос «Что такое математика?».

Пример 5 (Равичев, 1999). В 9 классе «А» действует мини-рынок компакт-дисков. Продавцами являются Маша, Саша, Даша и Паша. В таблице указано, сколько дисков готов продать каждый из них.

Таблица 1.
Предложение на рынке компакт-дисков

Продавец	Количество дисков, которое готов продать продавец (штук)	Цена, по которой продавец готов продавать свои диски (руб./диск)
Маша	1	20
Саша	2	40
Даша	3	60
Паша	5	100

Покупателями являются Коля, Оля, Толя и Поля. В следующей таблице указано, сколько дисков готов купить каждый из них.

Таблица 2.
Спрос на рынке компакт-дисков

Покупатель	Количество дисков, которое хочет купить покупатель (штук)	Цена, которую готов заплатить покупатель (руб./диск)
Коля	1	100
Оля	2	80
Толя	3	40
Поля	5	20

Постройте графики спроса и предложения компакт-дисков в классе, определите равновесную цену и равновесное количество.

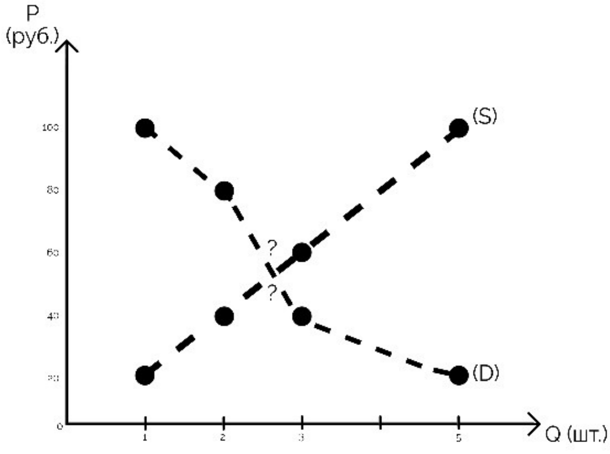

Рис. 7. Дискретная модель

Эту задачу тоже отнесём к группе задач с неожиданным ответом. Природа неожиданности может быть заключена в предположении о точечных графиках, как того «требуют» заданные таблицы, и в предчувствии не более чем одного ответа (если учащиеся знакомы с непрерывными функциями спроса и предложения и соответствующими законами спроса и предложения) на равновесные цену и количество компакт-дисков (рис. 7).

В результате, ложным ответом к задаче могут явиться указанные дискретные графики. Поэтому может показаться, что равновесие на таком мини-рынке отсутствует, поскольку понятие полезности компакт-дисков требует их целостности (нельзя полезно купить 2,5 компакт-диска).

Такой подход к ответу явно обусловлен применением формальной математической грамотности (построение графика последовательности) к решению экономической модели без учёта реалий жизни. Однако применение функциональной математической грамотности подсказывает явление так называемого эффекта накопления для количества товара. Опишем этот эффект подробнее. Построение кривой предложения (S), согласно данным таблицы «Продавец», подчинено закону предложения. При цене $P < 20$ руб. продавцы диски не предлагают, $Q_S = 0$ шт.; при 20 руб. $\leq P < 40$ руб. продавцы готовы продать один диск, $Q_S = 1$ шт.; при 40 руб. $\leq P < 60$ руб. – $Q_S = 1 + 2 = 3$ шт. (ведь Маша, скорее всего, согласится продать свой единственный диск ещё дороже!); при 60 руб. $\leq P < 100$ руб. – $Q_S = 1 + 2 + 3 = 6$ шт.; при $P \geq 100$ руб. – $Q_S = 1 + 2 + 3 + +5 = 11$ шт.

Итак, имеем

$$Q_S = \begin{cases} 0, & P < 20 \text{ руб.}, \\ 1, & 20 \text{ руб.} \leq P < 40 \text{ руб.}, \\ 3, & 40 \text{ руб.} \leq P < 60 \text{ руб.}, \\ 6, & 60 \text{ руб.} \leq P < 100 \text{ руб.}, \\ 11, & P \geq 100 \text{ руб.} \end{cases} \text{(шт.)}$$

На основе закона спроса, для кривой спроса (D), также имеем:

$$Q_D = \begin{cases} 5+3+2+1, & P \leq 20 \text{ руб.}, \\ 3+2+1, & 20 \text{ руб.} < P \leq 40 \text{ руб.}, \\ 2+1, & 40 \text{ руб.} < P \leq 80 \text{ руб.}, \\ 1, & 80 \text{ руб.} < P \leq 100 \text{ руб.}, \\ 0, & P > 100 \text{ руб.}; \end{cases} = \begin{cases} 11, & P \leq 20 \text{ руб.}, \\ 6, & 20 \text{ руб.} < P \leq 40 \text{ руб.}, \\ 3, & 40 \text{ руб.} < P \leq 80 \text{ руб.}, \\ 1, & 80 \text{ руб.} < P \leq 100 \text{ руб.}, \\ 0, & P > 100 \text{ руб.} \end{cases} \text{(шт.)}$$

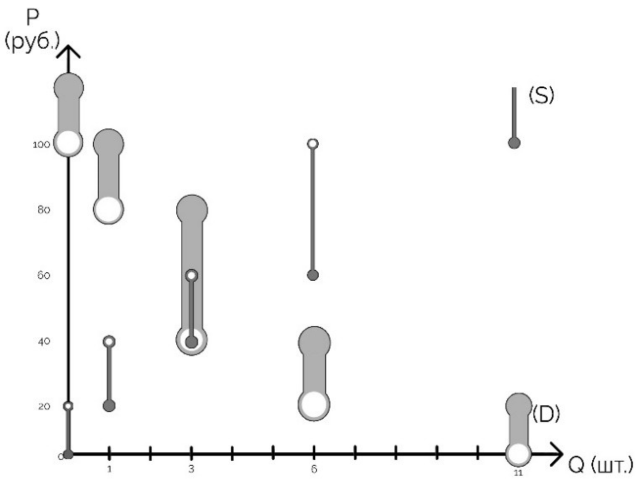

Рис. 8. Квази-непрерывная модель

Эффект накопления проявляет себя благодаря свойству «квази-непрерывности» цены (относительно неожиданному, но имеющему место в жизни). Итак, кривые спроса (D) и предложения (S) являются графиками соответственно невозрастающей и неубывающей функций количества Q от цены P (это важно для теоретической математики) и не являются графиками функций цены P от количества Q (что проявляется в практической экономике в силу свойства полезности товара) в силу многозначности.

В результате, верным ответом к задаче являются указанные графики, множество равновесных цен $P_E \in (40 \text{ руб.}; 60 \text{ руб.})$ и равновесное количество $Q_E = 3$ шт.

Указанный пример – полезная практическая задача с красивой математической моделью и ярко выраженным применением ФМГ для её решения. Разница в полученном нами ответе на основе модельного решения с ответом, приведённым в пособии, – «Равновесная цена установится в диапазоне свыше 40 руб. до 60 руб. (включительно). Равновесное количество будет равно 3», – в правильном применении скобки. Ответ: Равновесная цена установится в диапазоне свыше 40 руб. и менее 60 руб. Равновесное количество будет равно 3.

Заключение

Приведённые примеры показывают, что задачи с «неожиданным ответом», при их правильной интерпретации и представлении учащимся, способны не только активно стимулировать познавательную деятельность детей, развивать их творческие способности, но и запускать скрытые в подсознании ребят механизмы самостоятельной научной работы. Таким образом, представленные задания гипотетически подтверждают необходимость их применения в практике организации проектно-исследовательской деятельности школьников с целью формирования и/или развития их компетенций в области ФМГ.

Список литературы

Колесова Е.А., Колодяжный А.С., Хэкало С.П. Пять «орешков» для ученика: проекты, развивающие функциональную математическую грамотность // Научно-методические основы формирования функциональной грамотности: теория и практика современной школы, Коломна, 2023 г. Коломна: ГОУ ВО МО «ГСГУ», 2023. С. 46-51.

Миклашевич Ю.И., Хэкало С.П. Задачи на развитие функциональной математической грамотности учащихся 5-7 классов: «Пастильная фабрика в Коломне» // Математика для школьников. 2021. № 1. С. 26-38.

Петерсон Л.Г., Кочемасова Е.Е. Игралочка. Математика для детей 3-4 лет. ФГОС ДО. Часть 1. М.: Просвещение/Бином, 2022.

Равичев С.А., Григорьев С.Э., Протасевич Т.А., Свахин А.С. Задачи по экономике с решениями. 8–11 классы. 2-е изд., перераб. и доп. М.: МЦЭБО, 1999.

Хэкало С.П. Об одной псевдозадаче про последовательность // Математика в школе. 2020. № 2. С. 73-75.

Хэкало С.П. Об одной аттестационной задаче по теории вероятностей // Математика в школе. 2020. № 3. С. 48-51.

URL: https://www.instrao.ru/ (дата обращения 12.08.2025).

URL: https://drive.google.com/file/d/1Yz7l6EFm1ituUWp06gDiy8gt1siJh1QJ/view (дата обращения 12.08.2025).

URL: https://ege.sdamgia.ru/problem?id=320192 (дата обращения 12.08.2025).

URL: https://old.mccme.ru/free-books/izdano/2004/VIA-taskbook.pdf (дата обращения 12.08.2025).

THE PROBLEMS WITH "UNEXPECTED ANSWER" AND THEIR APPLICATION IN PROCESS FORMATION OF FUNCTIONAL MATHEMATICAL LITERACY OF SCHOOLCHILDREN

Vetoshkina E. S.
Ph.D (Mathematics), Associate Professor
elena.vetoshkina@mail.ru
Kolomna University

Leonova Zh. K.
Dr. Sci. (Economics), Professor
zh_leonova@mail.ru
Kolomna
Kolomna University

Khekalo S. P.
Dr. Sci. (Mathematics and Physics), Professor
khekalo@mail.ru
Kolomna
Kolomna University

Abstract. The modern digital transformation of society and the subsequent restructuring of the content of education new tasks for organizing the educational process is dictate. The problem of the origin and maturation of the functional literacy of schoolchildren, in particular, mathematical is one of these global tasks. Currently, there is no unambiguous approach to the description of technologies for the formation of competencies in functional mathematical literacy (FML). We see that György Poya's simple and long-proven way "If you want to learn how to solve problems, then solve them!" seems natural. In this regard, the present note proposes to reflect on the following questions: what is a task with an "unexpected answer," how such tasks arise, what is their need to form FML? Five similar theoretical and practical problems with different "genetics in the birth of surprise" in the answer are presented and discussed. The study and solution of these problems undoubtedly has a positive effect on the dynamics of the formation of schoolchildren FML and on the improvement of the horizons of mathematics teachers.

Keywords: mathematical literacy, functional mathematical literacy, problems with an unexpected answer

References

Khekalo, S. P. (2020). Ob odnoj psevdo zadache pro posledovatel'nost'. *Matematika v shkole,* 2, 73-75.

Khekalo, S. P. (2020). Ob odnoj attestacionnoj zadache po teorii veroyatnostej. *Matematika v shkole*, 3, 48-51.

Miklashevich, U. I., Khekalo, S. P. (2021). Zadachi na razvitie funkcional'noj matematicheskoj gramotnosti uchaschikhsya 5-7 klassov: "Pastil'naya fabrika v Kolomne". *Matematika dlya shkol'nikov, 1,* 26-38.

Kolesova, E. A., Kolodyazhnij, A. S., Khekalo, S. P. (2023). Pyat' "oreshkov" dlya uchenika: proekti, razvivauschie funkcional'nyu matematicheskyu gramotnost' [Five "nuts" for the schoolchildren: projects that develop functional mathematical literacy]. Nauchno-metodicheskie osnovi formirovaniya funkcional'noj matematicheskoj gramotnosti: teoriya I praktika sovremennoj shkoli (pp. 46-51). Kolomna: GOU VO MO GSGU. (In Russ.).

Peterson, L. G., Kochemasova, E. E. (2022). *Igralochka. Matematika dly detej 3-4 let.* GEF DO. Chast' 1. Moscow: Prosveschenie/Binom. (In Russ.).

Ravichev, S. A., Grigoriev, S. E., Protasevich, T. A., Svakhin, A. S. (1999). *Zadachi po ekonomike s resheniyami. 8-11 klassi*. Moscow: MCEBO. (In Russ.).

URL: https://www.instrao.ru/ (last viewed 12.08.2025)

URL: https://drive.google.com/file/d/1Yz7l6EFm1ituUWp06gDiy8gt1siJh1QJ/view (last viewed 12.08.2025).

URL: https://ege.sdamgia.ru/problem?id=320192 (last viewed 12.08.2025).

URL: http://www.itmathrepetitor.ru/arnold-zadachi-dlia-detei/ (last viewed 12.08.2025).

Статья поступила в редакцию 30.07.2025
Принята к публикации 28.08.2025