ПЕРСОНАЛИИ

DOI: 10.24888/2500-1957-2025-4-119-143

УДК 929: 51(378)

ОЧЕРК ДОСТИЖЕНИЙ М.А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО В ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (1950-1960-Е ГГ.)

Богатов Егор Михайлович
к.ф.-м.н., доцент

Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» в г. Губкине Белгородской области;
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»

Аннотация. В работе рассматриваются достижения М.А. Красносельского в сфере нелинейного функционального анализа; хронологические рамки исследования охватывают период с конца 1940-х по конец 1960-х гг. Анализ результатов основателя воронежской математической школы проводится в историко-математическом разрезе с отсылкой на работы его предшественников: П.С. Урысона, А.И. Некрасова, В. Орлича, Ю. Шаудера, Ж. Лере, М. Голомба, Л.В. Канторовича, В.В. Немыцкого, М.Г. Крейна, М.А. Рутмана и др. Автор использует несколько подходов к исследованию научного наследия М.А. Красносельского: презентистский, когда анализ его работ проводится с позиций современной математики, антикваристский, когда используется контекст времени получения результата, и, отчасти, научно-школьный. Последний предполагает оценивание результатов главного действующего лица с позиций реализации научно-исследовательской программы, включающей в себя достижения его учеников. В их роли здесь выступают Я.Б. Рутицкий, Л.А. Ладыженский, И.А. Бахтин, А.И. Поволоцкий, П.П. Забрейко, Ю.В. Покорный и др. Повышенное внимание уделяется результатам, полученным М.А. Красносельским в области теории положительных операторов (аналоги теорем Урысона и Рутмана, конусная теорема о неподвижной точке, теорема о существовании нескольких решений в конусе и др.), топологических и вариационных методов (принцип неподвижной точки, признак критической точки, бифуркационная теорема, принцип смены индекса и др.), а также приближённых методов решения нелинейных операторных уравнений (теоремы о сходимости метода последовательных приближений в конусе, топологическое обоснование проекционного метода и др.). Приводятся варианты практического применения результатов Красносельского в области нелинейной механики и теории волн.

Ключевые слова: М.А. Красносельский, нелинейный функциональный анализ, отечественные математики, воронежские математики

Благодарности: автор выражает благодарность руководителю семинара «Истории воронежской математики» С.Н. Ушакову (ВГУ), который пригласил автора сделать доклад на тему, указанную в названии статьи; участникам этого семинара за интерес к работе, а также профессору А.М. Красносельскому за доступ к электронному научному архиву М.А. Красносельского.

Для цитирования: Богатов Е.М. Очерк достижений М.А. Красносельского в области нелинейного функционального анализа (1950-е–1960-е гг.) // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2025. № 4 (40). С. 119–143. doi.org/10.24888/2500-1957-2025-4-119-143

Права: © Е.М. Богатов (2025). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Марк Александрович Красносельский является одним из выдающихся математиков XX века и обращение к его наследию (приуроченное к 105-летию со дня его рождения) может принести немалую пользу математикам и механикам, поскольку оно содержит множество нетривиальных идей, лежащих, прежде всего, в области функционального анализа. Здесь мы вынуждены ограничить себя верхней границей (конец 1960-х гг.) по той причине, что для оценки значимости математических результатов должно пройти не менее полувека (Гриценко, 2025). Этот тезис имеет несколько прямых и косвенных подтверждений (Howlett, 2025). Во-первых, научному сообществу нужно время, чтобы тщательно проверить доказательства, а также понять и принять новые идеи. Во-вторых, зачастую необходимо дождаться подходящего контекста, в котором новые результаты раскроются полностью. В-третьих, в силу консервативности научного сообщества, даже такая престижная премия, как Абелевская, отмечает работы математиков полувековой давности.

В материалах меморативного характера, к коим я отношу настоящую статью, принято начинать с биографических сведений. Автор считает эту традицию правильной, поэтому в следующем параграфе приводит сведения о М.А. Красносельском, хотя и носящие справочный характер, но вместе с тем проливающие свет на его происхождение и обозначающие некоторые особенности его жизнедеятельности после окончания университета.

1. Биографические сведения

М.А. Красносельский родился 27 апреля 1920 года на Украине в г. Староконстантинове (Хмельницкая обл.). Его отец – Александр Яковлевич, работал инженером-строителем в Азоврыбтресте. Мать – Фанни Моисеевна, преподавала русский язык в средней школе. В семье Красносельских было два сына. Старший (Иосиф) впоследствии стал известным инженером-металлургом, одним из основателей и руководителей Московского завода специальных сплавов. Младший (Марк) выбрал профессию математика (Асарин, 1997).

М.А. Красносельский

В 1932 году семья Красносельских переезжает в приморский г. Бердянск (Запорожская обл.). В 1938 году Марк оканчивает среднюю школу и поступает на физико-математический факультет Киевского университета. В связи с начавшейся войной Киевский университет в 1941 году эвакуируют в Казахстан (г. Кзыл-Орда), где он стал называться Объединенным украинским университетом. В 1942 году М.А. Красносельский заканчивает Объединенный украинский университет и затем четыре года служит в Советской Армии: преподаёт в

Рязанском артиллерийском училище, эвакуированном в военные годы в г. Талгар Алма-Атинской области (Богатов, 2020). В 1946 году Марк Александрович демобилизовался в звании лейтенанта и в августе этого года переезжает в Киев. Здесь он получает должность младшего научного сотрудника в Институте математики Украинской Академии наук и попадает в обстановку бурной научной жизни. Он слушает лекции и участвует в семинарах выдающихся ученых, среди которых Н.Н. Боголюбов (нелинейная механика и теория колебаний), М.Г. Крейн (функциональный анализ и теория моментов), А.В. Погорелов (теория геодезических и регулярные поверхности), М.А. Лаврентьев (гидроаэродинамика и газовая динамика), А.Ю. Ишлинский (теория динамической устойчивости) и другие (Митропольский, 1967). В 1948 году М.А. Красносельский защитил кандидатскую диссертацию по теории расширения эрмитовых операторов (руководитель – М.Г. Крейн), а в 1950 году – докторскую диссертацию по топологическим методам нелинейного анализа (Красносельский, 1950). В 1952 году М.А. Красносельский переезжает, по приглашению В.И. Соболева (ВГУ) в г. Воронеж, и начинает создавать здесь, совместно с С.Г. Крейном, математическую школу (Покорный, 2014).

О некоторых достижениях М.А. Красносельского в области функциональных пространств

Как хорошо известно, первой его монографией в области нелинейного функционального анализа была книга «Топологические методы в теории интегральных уравнений» (1956), в которой приводились, по большей части, результаты его докторской диссертации. Ещё одной значимой его работой середины 1950-х гг. явилась большая статья в Успехах математических наук «Некоторые задачи нелинейного анализа» (Красносельский, 1954). От этих трудов и будем поначалу отталкиваться.

Перейдём к объекту исследований. В большинстве случаев им являлись два вида интегральных уравнений: Гаммерштейна

$$y(x) = \lambda \int_D K(x,s) f(s,(y(x))ds \qquad (1)$$

и Урысона

$$y(x) = \lambda \int_D K(x,s,y(s))ds. \qquad (2)$$

К середине XX века среди математиков уже возникло понимание того, что подобные уравнения проще изучать в более общей, операторной постановке:

$$y = \lambda A y, \qquad (3)$$

где A действует из некоторого банахова пространства E в банахово пространство F (Schauder, 1927), (Lichtenstein, 1931), (Немыцкий, 1934), (Golomb, 1935), (Rothe, 1949) и др. Одним из главных вопросов при анализе уравнения (3) является вопрос о существовании его решений. Но перед тем, как перейти к его обсуждению, для операторов Гаммерштейна (A_1) и Урысона (A_2), определённых правыми частями уравнения (1) и (2) соответственно, необходимо было корректно определить пространства E и F в зависимости от вида нелинейности (степенная, экспоненциальная, логарифмическая и т.п.). И если для случая, когда $E=F=C[D]$ к середине 1930-х гг. всё было более или менее понятно даже для уравнения Урысона (Немыцкий, 1934а), то для разрывных ядер/функций с интегрируемыми особенностями потребовалось задействовать линейку пространств L^p (степенная нелинейность) или более сложный вариант – пространства Орлича L_M^* (существенно нестепенные нелинейности). Здесь необходимо сделать некоторые пояснения.

1) L_M^* – это пространство функций, интегрируемых с некоторой выпуклой М-функцией, определённое В. Орличем в середине 1930-х гг. (Orlicz, 1936).

2) В первоначальном виде теория пространств Орлича не позволяла работать с быстрорастущими нелинейностями в контексте исследования уравнений (1) и (2). Эта теория была значительно переработана М.А. Красносельским и его учеником Я.Б. Рутицким в

течение десяти лет (Красносельский, 1958), в результате чего появилась возможность применять схему Шаудера[4] для разрешимости уравнений (1) – (2).

Одним из примеров уравнения, для изучения которого нужно было использовать пространство Орлича, явилось уравнение Лиувилля[5]

$$\Delta u = e^u, \tag{4}$$

где $u=u(x,y)$; $(x,y) \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^2$, равносильное интегральному уравнению

$$u(x,y) = -\iint_\Omega \left(e^{u(\xi,\eta)} G(\xi,\eta,x,y)\right) d\xi d\eta,$$

в котором $G(x,y)$ – это функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в области Ω.

3. О результатах М.А. Красносельского в области положительных операторов

Следует отметить, что киевская школа функционального анализа подпитывалась постановками задач школы нелинейной механики Боголюбова-Крылова (Самойленко, 1994). Хорошо известно (см., например, (Колмогоров, 1958)), что М.Г. Крейн построил теорию осцилляционных матриц, изучая математическую природу механических колебаний. Подобную способность – соединять теорию с практикой – усвоил и его ученик М.А. Красносельский. Исследуя в послевоенные годы формы потери устойчивости стержня переменной жёсткости при вынужденном изгибе[6] (см. рис. 1), он свёл задачу к уравнению Урысона вида:

$$A\varphi(s) = \rho(s) \int_0^1 K(s,t)\varphi(t)dt \sqrt{1 - \left[\int_0^1 K'_s(s,t)\varphi(t)dt\right]^2}, \tag{5}$$

где

$$K(s,t) = \begin{cases} s(1-t) & \text{при } s \le t \\ t(1-s) & \text{при } s \ge t \end{cases}.$$

Используя уравнение (5), как модельное, Красносельский апробировал ряд созданных им новых подходов к решению нелинейных операторных уравнений вида (3). Одним из таких подходов явилось использование теории конусов, восходящей к М.Г. Крейну (Богатов, 2020а).

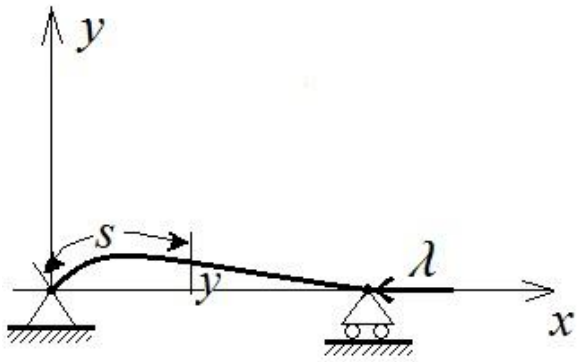

Рис. 1 Изгиб стержня сосредоточенной силой (Красносельский, 1957, с. 204).

Напомним, что конусом K в банаховом пространстве E называется множество элементов, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $x \in K \Rightarrow \lambda x \in K$ при $\lambda \ge 0$.

[4] Ключевым моментом этой схемы являлось доказательство полной непрерывности операторов A_1 и A_2.

[5] Этим уравнением, в частности, описывается процесс горения в стационарной ситуации (Зельдович и др., 1980).

[6] По словам профессора ВГУ М.И. Каменского, Красносельский проводил натурные эксперименты со стержнями, помещёнными в воду вертикально и закреплёнными снизу, в верхней части которых помещался заряд тротила с последующим его подрывом (Богатов, 2020). Получающееся в результате многократного повторения этого опыта конфигурации стержней образовывали своеобразный конус в трёхмерном пространстве.

2. $x, y \in K \Rightarrow (x + y) \in K.$
3. $x \in K; x \neq \theta \Rightarrow -x \in E \setminus K.$

Простейшим примером конуса в бесконечномерном пространстве служит конус выпуклых (непрерывных) функций *x(t)*, определённых на отрезке [–1,1] и удовлетворяющих условию *x*(–1) = *x*(1) = 0 (рис. 2).

Значительная часть результатов в линейной теории конусов была получена М.Г. Крейном и его другим учеником М.А. Рутманом (Богатов, 2025) на основе топологических соображений (теорема о неподвижной точке и др.).

В нелинейной части теории первые результаты Рутмана относились к обобщению теоремы Ентча (о существовании положительной собственной функции в интегральном уравнении Фредгольма с положительным ядром) на абстрактную ситуацию

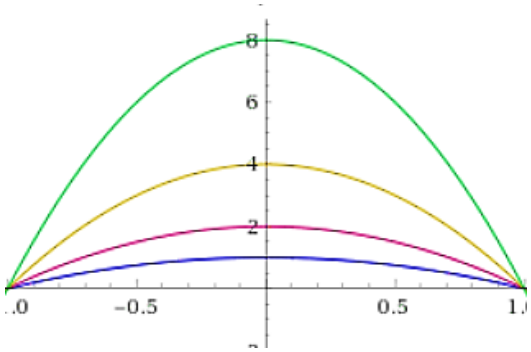

Рис. 2. Конус выпуклых на [–1,1] *функций с нулевыми значениями на концах отрезка*

Если оператор A вполне непрерывен, монотонен по конусу ($x \succcurlyeq y \Rightarrow Ax \succcurlyeq Ay$) *и ограничение на рост его значений вдоль некоторого луча внутри конуса аналогично условию вогнутости вида*

$$\exists\, (u \in K;\, c > 0,\, \varepsilon > 0)\, [A(tu) \succcurlyeq ctu]\ \forall (t \in [0,\, \varepsilon]) \qquad (6)$$

(рис. 3) то уравнение $Ax = \lambda x$ всегда имеет положительное решение ($\lambda > 0$, $x \in K$), причём норма элемента *x* может выбрана произвольно (Крейн, 1948, с.92).

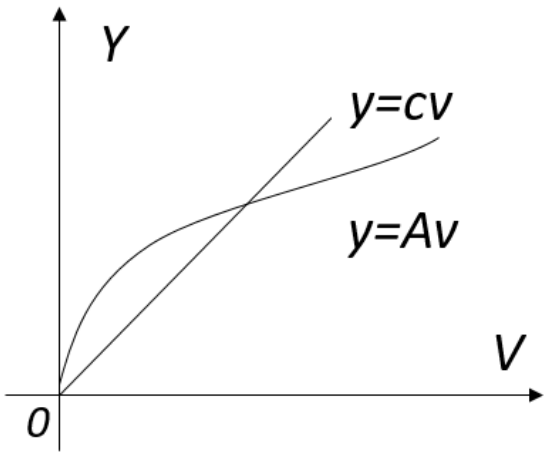

Рис. 3. Геометрический смысл условия Рутмана – существование пересечения вогнутой функции с наклонной прямой

Двигаясь в направлении обобщения результата Рутмана, Красносельский дал определение монотонной миноранты B нелинейного оператора A, как положительного

монотонного оператора, удовлетворяющего условию (6) и неравенству[7] (Красносельский, 1951)

$$Ax \succcurlyeq Bx, \qquad x \in K \subset E. \tag{7}$$

Этот шаг позволил применять теорию конусов к широким классам *немонотонных* положительных операторов (Красносельский, 1962, гл. 4, § 2). При этом в качестве монотонной миноранты *B* оказалось удобным использовать линейный положительный оператор. В ряде случаев для *B* в (7) подходит сильная производная по конусу в нуле оператора *A*, которая обычно выглядит так (Красносельский, 1962, с. 101): $\dot{y}(0) = A'(x)h$.

В частности, монотонной минорантой оператора Урысона из (2) может служить интегральный оператор

$$B\varphi(x) = \int_a^b R(x,y)\varphi(y)dy$$

в случае, когда функция $K(x,y,u)$ оценивается снизу:

$$K(x,y,u) \geq R(x,y)u,$$

где $R(x,y) \geq m > 0$. В роли конуса *K* тогда выступает множество непрерывных и неотрицательных на отрезке [*a, b*] функций.

Целью указанных построений Красносельского явилось доказательство операторного аналога теоремы Урысона об оценке спектра мажорируемых по конусу операторов. Однако здесь пришлось ввести новое понятие *u_0-ограниченных операторов*[8] (совместно с его учеником Л.А. Ладыженским (Красносельский, 1954)). Линейный положительный оператор *A* был назван u_0-ограниченным, если *существует такой (ненулевой) элемент конуса* $u_0 \in K$, *что некоторая степень оператора A переводит произвольный элемент конуса внутрь "конусного отрезка"* $[\alpha u_0, \beta u_0]$.

Свойства u_0-ограниченного оператора помогли доказать аналог урысоновской теоремы о спектре (Красносельский, 1954, с. 329–330):

Теорема 1. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет неравенству:*

$$P\varphi \succcurlyeq A\varphi \succcurlyeq Q\varphi, \ \varphi \in K,$$

где P, Q *– некоторые линейные положительные u_0-ограниченные операторы, удовлетворяющие условиям:*

а) оператор A, асимптотически близок к оператору Q по конусу K;

б) оператор P является производной Фреше оператора A в точке θ по конусу.

Тогда позитивный спектр[9] *оператора A полностью заполняет интервал* (λ_Q, λ_P), *где* λ_Q, λ_P *– положительные собственные числа операторов Q и P соответственно, которым отвечают положительные собственные векторы.*

Приведённая теорема сразу дала возможность получать нелокальные результаты в приложениях. Помимо уже упомянутых задач механического характера (Бахтин, 1955), сюда следует также отнести задачи нахождения профиля волн различной амплитуды на поверхности тяжёлой жидкости, сводящиеся к уравнению Некрасова:

$$\Phi(\theta) = -\frac{\mu}{12\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\Phi(\varepsilon)}{1+\mu\int_0^{\varepsilon}\sin\Phi(\alpha)d\alpha} K(\varepsilon,\theta)d\varepsilon. \tag{8}$$

Здесь μ – амплитуда волны, $\Phi(\theta)$ – профиль волны, θ – угол наклона волны (Красовский, 1960).

---

[7] $x \succcurlyeq 0$ означает, что $x \in K$.

[8] В монографии (Красносельский, 1962) u_0-ограниченные операторы были переименованы в u_0-положительные.

[9] То есть совокупность тех точек спектра, которым отвечают положительные собственные векторы.

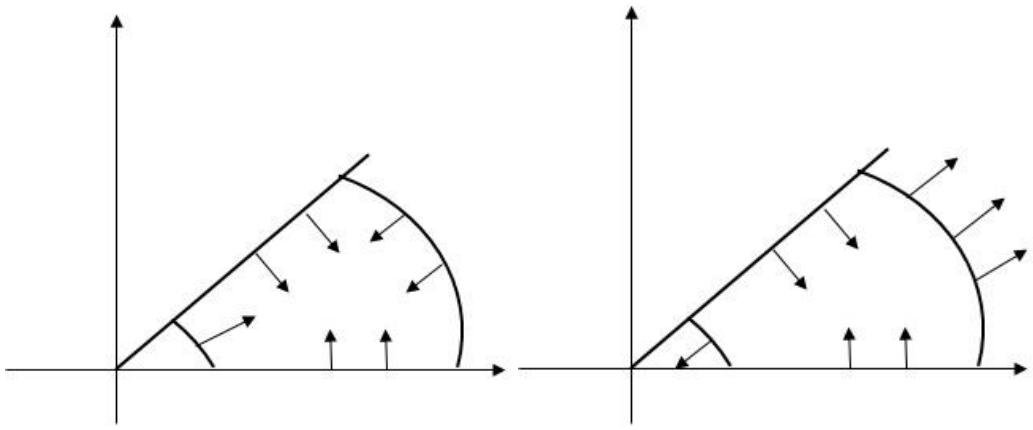

Рис. 4. Сжатие (*слева*) *и растяжение конуса в* $\mathbf{R}^2$ (Kwong, 2008, p. 893)

Ещё одним интересным результатом, также имеющим нелокальный характер, является конусная теорема о неподвижной точке, доказанная Красносельским в 1960-м году (Красносельский, 1960).

Теорема 2. *Пусть вполне непрерывный оператор A сжимает или растягивает конус K. Тогда A имеет в конусе K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

Действие сжимающего и растягивающего конус оператора пояснено на рис. 4.

Специалист по нелинейному анализу, профессор М.К. Квонг (КНР) настаивает на том, что конусная теорема Красносельского о неподвижной точке (конусная ТНТ) интерпретируется за рамками метрического восприятия и тем самым может быть поставлена в один ряд с теоремой о неподвижной точке Брауэра (Brouwer, 1912) и Шаудера (Schauder, 1927). Несмотря на использование вложенности конуса в банахово пространство в теореме 2, наличие нормы не является необходимым условием; она была введена скорее для удобства (Kwong, 2008, p. 894). Кроме того, конусная ТНТ позволяет также рассматривать более общие случаи, не подпадающие под действие теоремы Шаудера (в последней оператор *A* должен преобразовывать некоторое подмножество *E в себя*).

Переключимся теперь на проблему неединственности решений, присущей зачастую, задаче (3) с оператором A, не относящимся к категории сжимающих. Наиболее элегантное решение, как выяснилось, также допускает нахождение в контексте теории конусов. В работе (Красносельский, 1963), для вполне непрерывного, монотонного по конусу оператора A было доказано следующее утверждение

Если существует последовательность точек

$$u_i, v_i \in E,$$

такая, что

$$u_1 \preccurlyeq v_1 \preccurlyeq u_2 \preccurlyeq v_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq u_n \preccurlyeq v_n,$$

причём $Au_i \succcurlyeq u_i$, $Av_i \preccurlyeq v_i$ $(i = 1,2, \dots, n)$, *то оператор A имеет не менее n неподвижных точек* $x_i = Ax_i$ $(i = 1,2, \dots, n)$ *и выполнено условие* $u_i \preccurlyeq x_i \preccurlyeq v_i$.

В качестве примера его использования можно привести доказательство существования *n* непрерывных решений уравнения Гаммерштейна, при условии, что оператор A_1

$$\mathrm{A}_1 y(t) = \int_\Omega K(t,s) f\big(s, y(s)\big) ds,$$

в котором ядро $K(t,s)$ неотрицательно, действует и вполне непрерывен в пространстве $C(\Omega)$, функция *f*(*s*,*y*) при каждом *s* строго возрастает по *y* и имеет *n* перемежающихся участков быстрого и медленного роста.

Отметим, что тема существования нескольких неподвижных точек получила своё продолжение не только в работах учеников Красносельского (Ю.В. Покорного и др. (Покорный, 1967)), но и ряда западных математиков (см., например, (Laetsch, 1971), (Amann, 1972)).

4. О результатах М.А. Красносельского в теории бифуркаций и степени отображения

Ещё одной характерной чертой нелинейных операторных уравнений вида (3) является возможность бифуркации их решений, то есть наличие такого порогового значения $\lambda = \lambda_0$, при приближении к которому появляются новые решения уравнения (3), отличные от уже имеющихся при $|\lambda - \lambda_0| > \varepsilon$ (см. рис. 5).

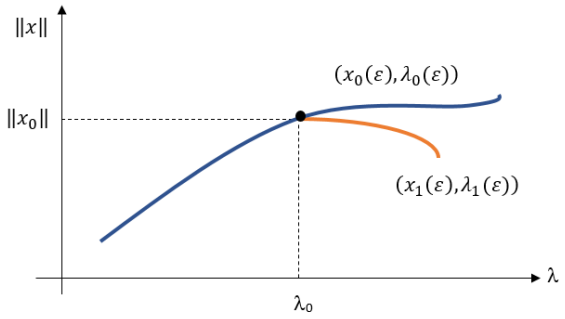

Рис. 5. График решений уравнения (3) в плоскости ($\|x\|$, λ) *– бифуркационная диаграмма*

Механическим аналогом можно считать здесь появление форм прогиба вертикально нагруженного стержня при условии, что действующая на него продольная сила превысит критического значение.

Обсуждаемая тема (в математической её постановке) берёт своё начало от работ А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова конца XIX – начала XX вв. (Богатов, 2021). В механике при отыскании точек бифуркации нелинейного оператора *A* задачу обычно линеаризуют, заменяя оператор *A* его производной Фреше в точке θ и считают, что точки бифуркации оператора *A* – это характеристические числа линейного оператора *B* (Ясинский, 1952, с. 125–129). Для некоторых частных случаев законность подобной замены была подтверждена А.И. Некрасовым (Некрасов, 1922) и Н.Н. Назаровым (Назаров, 1941) на основе аналитических методов. Общий случай был рассмотрен М.А. Красносельским и А.И. Поволоцким (1953), которые доказали, что *точками бифуркации оператора A могут быть только собственные значения линейного оператора B* (Красносельский, 1953). Однако некоторые из этих значений могут и не быть точками бифуркации.

Чтобы получить условия, при выполнении которых собственные значения оператора *B* гарантированно являются точками бифуркациями оператора *A*, Красносельский задействовал теорию степени отображения. Рассматривая в пространстве *E* вполне непрерывные векторные поля вида

$$\mathbf{\Phi}_\lambda = I - \lambda A \qquad (9)$$

и опираясь на теорему Лере–Шаудера о значении индекса изолированной неподвижной точки $\mathbf{\Phi}_\lambda$ (Leray et al., 1934, p. 58), Красносельский доказал (1951) свою знаменитую *бифуркационную теорему,* ставшую в скором времени классической (Красносельский, 1951а, с. 391):

Теорема 3. *Пусть A – вполне непрерывный, дифференцируемый в нуле оператор, удовлетворяющий условиям*

1) $A(\theta) = \theta$.

2) *Оператор A имеет в нуле вполне непрерывную производную Фреше – оператор B.*

Тогда каждое собственное значение нечётной кратности линейного оператора B является точкой бифуркации оператора A. Этой точке бифуркации соответствует в окрестности θ непрерывная ветвь[10] *собственных векторов оператора A.*

Характерным примером применения бифуркационной теоремы Красносельского может служить утверждение о том, что критические силы в задаче об изгибе стержня

[10] Непрерывная ветвь – это континуальное множество решений $\wp$, обладающее тем свойством, что $\wp$ имеет непустое пересечение с границей каждой ограниченной области, содержащей нуль пространства *E* (Красносельский, 1958, с. 375).

переменной жёсткости ρ(s), соответствующей уравнению (3) с оператором (5), могут быть определены по линейному уравнению

$$y'' = -\lambda\rho(s)y$$

(Красносельский, 1956, с. 200–201).

Подчеркнём, что теория вращения вполне непрерывных векторных полей вида (9) разрабатывалась Красносельским с конца 1940-х гг. (Богатов, 2020b). Она явилась «геометрическим» продолжением теории степени отображения Лере-Шаудера и носила, в отличие от предшествующей, нелокальный характер. М.А. Красносельский положил степень отображения $\Phi = I–F$ области $U \subset E$ равной вращению соответствующего векторного поля $\boldsymbol{\Phi}$ на её границе ∂U (Красносельский, 1951, с. 125–127):

$$Deg\,(\Phi, U) \stackrel{def}{=} W(\boldsymbol{\Phi}, \partial U) \qquad (10)$$

Выражение в правой части (10) есть вращение конечномерного векторного поля Φ_n, порождённого $\boldsymbol{\Phi}$, на границе покрытия ∂U системой шаров B^∞, аппроксимируемых конечномерными шарами B^n по аналогии со схемой Роте (Rothe, 1938). Конечномерное вращение поля Φ_n в области Ω, допускающей триангуляцию, Красносельский определял, как степень отображения полиэдра Ω на ориентированную сферу S^n:

$$\Psi_n x = \frac{\Phi_n x}{\|\Phi_n x\|}$$

(Красносельский, 1951b, с. 89).

Опираясь на приведённое определение, Красносельский показал, *что для существования неподвижной точки вполне непрерывного поля* $\boldsymbol{\Phi}$ *внутри области G банахова пространства E достаточно, чтобы вращение этого поля на границе G было отлично от нуля* (принцип неподвижной точки Красносельского).

В связи с принципом Красносельского интерес представляют признаки отличия от нуля вращения поля Φ (как конечномерного, так и бесконечномерного). Они также были найдены Красносельским и основывались на утверждении о том, что вращения гомотопных[11] полей одинаковы. Это позволяло заменять заданное поле $\boldsymbol{\Phi}$ на гомотопное ему поле $\boldsymbol{\Psi}$, для которого несложно вычислить вращение (Красносельский, 1954, с. 83–84).

Вернёмся к теории бифуркаций.

Красносельский распространил действие своей бифуркационной теоремы (теоремы 3) также на случай, когда параметр λ входит в уравнение нелинейным образом

$$\varphi = A(\lambda, \varphi), \qquad (11)$$

где вполне непрерывный оператор $A(\lambda, \varphi)$ определён в некоторой окрестности нуля пространства *E*, а производная Фреше этого оператора имеет вид λB, где линейный оператор B не зависит от λ (Красносельский, 1956a, с. 203). В предположении, что B *вполне непрерывен и его собственное значение* λ_0 *нечётнократно*, оказалось, что *решения уравнения (9)* φ_λ*, отвечающие близким к бифуркационному значению* λ_0 *значениям* λ*, также образуют непрерывную ветвь, причём* $\lim\limits_{\|\varphi_\lambda\|\to 0} \lambda = \lambda_0$.

Классическим примером уравнения (11) может служить уравнение Некрасова (8), для которого Красносельским не только была обоснована законность линеаризации, но и исследован вопрос, при каких значениях λ, близких к λ_0, уравнение Некрасова имеет ненулевые решения. При этом указанное исследование было проведено без перехода к уравнениям разветвления и использования разложения в ряд (Красносельский, 1956a).

Более простым, но вместе с тем и более важным достаточным условием наличия точки бифуркации явился так называемый *принцип смены индекса,* доказанный М.А. Красносельским в (Красносельский, 1956a, с. 236) для уравнения (3) и уточнённый для

[11] Гомотопность вполне непрерывных полей $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\Psi}$ предполагала возможность *вполне непрерывной* деформации их друг в друга.

уравнения (11) в (Забрейко, 1968) при условии, что вполне непрерывный оператор $A(\lambda,\varphi)$ имеет вид

$$A(\lambda,\varphi) = B(\lambda)\varphi + C(\lambda,\varphi), \qquad (12)$$

где $B(\lambda)$ – линейный непрерывный оператор, непрерывно зависящий от λ по операторной норме, $C(\lambda,\varphi)$ – оператор, содержащий члены выше, чем первого порядка малости по переменной φ.

Приведём соответствующую теорему.

Пусть при переходе через λ_0 индекс $\gamma(\lambda)$ векторного поля $\mathbf{\Phi}_\lambda\varphi = \varphi - A(\lambda,\varphi)$ в θ меняет свою величину, где θ – изолированная особая точка векторного поля $\mathbf{\Phi}_\lambda$, тогда λ_0 – точка бифуркации уравнения (11).

Чтобы применять теорему о смене индекса к исследованию конкретных операторных уравнений, необходимо уметь вычислять индексы нулевых особых точек векторных полей и осуществлять проверку их изолированности. Общий алгоритм сведения указанных задач к анализу конечномерных полей был разработан в статьях М.А. Красносельского и П.П. Забрейко (Забрейко, 1961), (Забрейко, 1964).

Как отметили М.А. Красносельский, П.П. Забрейко и А.В. Покровский в (Забрейко, 1968, с. 44), вместо вполне непрерывных операторов в принципе смены индекса и теоремах о расположении спектра могут быть использованы и другие операторы (слабо непрерывные, уплотняющие и т.п. (Богатов, 2025, § 5.5)), для которых корректно определяется вращение соответствующих векторных полей.

Подчеркнём, что все приведённые в настоящем параграфе результаты до сих пор носили *локальный* характер. Соединение локального и глобального подхода к исследованию решений нелинейных уравнений можно увидеть в монографии Красносельского (Красносельский, 1956а, гл. IV, § 2), который доказал следующую теорему

Пусть A – вполне непрерывный дифференцируемый в нуле θ оператор ($B = A'(\theta)$), удовлетворяющий условию $A(\theta)=\theta$. Тогда каждое характеристическое значение нечётной кратности λ_0 линейного оператора B является точкой бифуркации оператора A, причём этой точке бифуркации соответствует непрерывная ветвь собственных векторов оператора A, выходящих из θ и уходящих в бесконечность.

Это утверждение Красносельского было доказано на основе теории вращения вполне непрерывных векторных полей. Оно характеризует поведение собственных функций нелинейного оператора «в целом», послужив отправной точкой для выхода на другие результаты глобального характера. Первым из таких результатов – *глобальная бифуркационная теорема* – был получен американским математиком П. Рабиновичем (1971), который исследовал решения уравнения (11) в окрестности точки его бифуркации при тех же предположениях относительно оператора $A(\lambda,\varphi)\colon \mathbb{R}\times E \to E$, что и Красносельский (Rabinowitz, 1971).

5. О некоторых достижениях М.А. Красносельского в области вариационных методов

Вариационный подход для решения уравнений вида

$$By=0 \qquad (13)$$

берёт своё начало от работ М. Голомба (Golomb, 1935). Предполагается, что оператор B в уравнении (13) является потенциальным, то есть представляется в виде градиента некоторого функционала F, заданного в гильбертовом пространстве:

$$B=\operatorname{grad} F.$$

Тогда критические точки F есть нули оператора B.

Сам Голомб исследовал абстрактные аналоги уравнения Гаммерштейна вида

$$y-H^2G(y)=0 \qquad (14)$$

где $H\colon E\to E$ – ограниченный, вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве E. Кроме того, оператор G определялся на замкнутой оболочке E' множества значений H, должен быть непрерывен на E' и являться на E' градиентом вещественного функционала F, удовлетворяющего неравенству

$$F(y) \geq -\frac{k}{2}(y,y) - C$$

для любого $y \in E'$ и некоторого числа k: $0<k<h$ и постоянной $C > 0$.

Схема исследования уравнений (14), предложенная Голомбом в контексте анализа уравнения Гаммерштейна (1), предполагала возможность расщепления линейного интегрального оператора с положительно определённым симметричным ядром:

$$Au = \int_{\Omega} K(s,t)u(t)dt$$

то есть

$$Au \stackrel{\text{def}}{=} H^2u.$$

Существенным элементом обсуждаемой схемы был переход от уравнения (14) к эквивалентному уравнению

$$v - H^*GHv = 0, \quad (15)$$

где G – градиент некоторого функционала в E, подлежащего минимизации. Таким функционалом является функционал

$$\Psi(v) = 0.5(v,v) - \Phi(v), \quad (16)$$

где $\Phi(v) = G(Hv)$, что соответствует следующему представлению Φ в уравнении Гаммерштейна, полученному Голомбом:

$$\Phi(v) = \int_{\Omega}\int_0^{Hv} f(t,u)dudt. \quad (17)$$

Замена $Hv = x$ позволяет перейти от (15) к уравнению

$$HH^*Gx = x.$$

Почеркнём, что существование минимизирующей последовательности для функционала Ψ из (16) доказывалось Голомбом без перехода к конечномерным подпространствам (как у В. Ритца (Ritz, 1909)), а с опорой только на слабую компактность[12] сферы в пространстве Гильберта и свойства оператора H.

Из полунепрерывности потенциального оператора G, входящего в уравнение (14) и определённого в пространстве $\mathcal{E} = L^2$ следует, что оператор AG имеет не менее, чем континуум собственных функций, если только линейный оператор A: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ вполне непрерывный, положительно определённый и самосопряжённый (теорема Голомба, (Golomb, 1935, p. 74)). При этом требование, чтобы оператор G действовал в пространстве L^2, является довольно ограничительным. Как показал М.А. Красносельский (Красносельский, 1956а, гл. I, § 2) в этом случае функция $f(t, u)$, задающая оператор G (оператор Немыцкого[13]), является «подлинейной», то есть удовлетворяет неравенству

$$|f(t,u)| \leq a(t) + b|u|, \ (t \in \Omega, -\infty < u < +\infty).$$

Распространение теоремы Голомба на абстрактные операторы Гаммерштейна, имеющие степенные нелинейности, было также осуществлено Красносельским (Красносельский, 1956, с. 347). В условиях расщепляемости оператора A, которые были детально изучены в (Красносельский, 1952), оказалось достаточно потребовать, чтобы оператор Немыцкого G действовал из L^p в L^q. Дальнейшее обобщение теоремы Голомба (на существенно нестепенные нелинейности) было выполнено Красносельским совместно с Я.Б. Рутицким в контексте теории пространств Орлича L_M^* (Красносельский, 1958, гл. 4, § 20). Помимо условия расщепляемости оператора A, это обобщение включало в себя нахождение условий потенциальности оператора G, сводящихся к тому, что дополнительная к $M(u)$ N – функция N(u) растёт не быстрее, чем u^2, а оператор G действует из $\Pi(E_M, r)$ в L_N^*, где E_M – замыкание в L_N^* множества ограниченных функций, а $\Pi(E_M, r)$ – совокупность функций $u(x) \in L_M^*$, для которых $\inf_{w \in E_M} \|u - w\|_M < r$ ($\|\cdot\|_M$ – норма Орлича).

[12] Множество S называется *слабо компактным*, если любая его бесконечная последовательность элементов имеет слабо сходящуюся подпоследовательность, предел которой не обязан принадлежать S.

[13] Оператор Немыцкого – это оператор суперпозиции $G(u) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, u(x))$.

Перейдём к более общим результатам, относящимся к разрешимости уравнения

$$\Gamma\varphi = 0, \qquad \varphi \in \mathcal{E}$$

где $\Gamma = grad\ \Phi$.

Как показал Красносельский, здесь определяющую роль играют гладкие в шаре B, B, $B \subset \mathcal{E}$

$$\Phi(\varphi + h) - \Phi(\varphi) = (h, \Gamma\varphi) + o(\|h\|), \quad \varphi \in B, h \in \mathcal{E}$$

и возрастающие

$$\lim_{\|\varphi\| \to \infty} \Phi(\varphi) = \infty,\ \varphi \in \mathcal{E} \tag{18}$$

функционалы.

В этом случае, если потенциальный оператор Γ представляется в виде суммы

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2, \tag{19}$$

где Γ_1 – линейный непрерывный оператор, имеющий непрерывный обратный, а Γ_2 – вполне непрерывен, то существует такая точка $\varphi_0 \in \mathcal{E}$, в которой гладкий возрастающий функционал Φ (потенциал оператора Γ) принимает своё наименьшее значение, причём $\Gamma\varphi_0 = 0$ (признак Красносельского существования критической точки) (Красносельский, 1953, с.950).

Применение указанного признака к разрешимости уравнения Гаммерштейна $AG\varphi = \lambda\varphi$ было связано с проверкой свойства (17) для функционала

$$\Phi(\varphi) = 0{,}5(\varphi, \varphi) - \lambda \int_\Omega \int_0^{Hv} f(t, u)dudt,$$

определённого на $\mathcal{E} = L^2$. Соответствующий ему оператор Γ имеет вид $\Gamma = I - H^*GH$, где $HH^* = A$ – оператор Фредгольма с положительно определённым ядром. Поскольку (φ, φ) возрастает при $\|\varphi\| \to \infty$, свойство (18) будет обеспечено, если

$$\lambda \overline{\lim_{\|\varphi\| \to \infty}} \frac{F(\varphi)}{(\varphi, \varphi)} < \frac{1}{2},$$

где $F(\varphi)$ – функционал вида (17) (Красносельский, 1954, с. 91).

Вариационная схема исследования абстрактного уравнения Гаммерштейна вида

$$AGy = y \tag{20}$$

предложенная Красносельским (Красносельский, 1954, гл. IV, § 6), сводилась к переходу от уравнения с непотенциальным оператором (20) к эквивалентному уравнению вида

$$y - A^{\frac{1}{2}} G\left(A^{\frac{1}{2}} y\right) = 0,\ y \in H, \tag{21}$$

левую часть которого можно представить, как *grad F*, где

$$F = \frac{1}{2}(y, y) - f\left(A^{\frac{1}{2}} y\right). \tag{22}$$

Таким образом, левая часть равенства (20) – это потенциальный оператор, а решениями уравнения (20) служат критические точки функционала (22) и только они, поэтому задача сводится к поиску этих точек.

Кроме вариационного метода доказательства разрешимости абстрактного уравнения Гаммерштейна (20) с положительно определённым ($(Au,u) \geq 0 \quad \forall u \in H$) самосопряжённым оператором A на основе расщепления оператора A по принципу $A = A^{1/2} \cdot A^{1/2}$, Красносельский (а также, независимо, Вайнберг, (Вайнберг, 1956, гл. III, § 10)), нашёл условия разрешимости уравнения (20) с квазиположительными и квазиотрицательными[14] (то есть квазидефинитными) операторами A. Здесь он опирался на признак существования критической точки функционала (Красносельский, 1956, гл. V, §1), основанный на соотношениях (18) – (19). Достаточным условием разрешимости уравнения (20) явились полная непрерывность оператора A и выполнение неравенства вида

$$\int_0^u f(t, v)dv \leq \frac{a}{2}u^2 + g(t)|u|^{2-\gamma} + g_1(t),$$

[14] Самосопряжённый оператор A называется *квазиотрицательным*, если непустой отрицательный его спектр является произвольным, а положительный спектр состоит из конечного (ненулевого) числа собственных значений, имеющих конечную кратность. Аналогично определяются квазиположительные операторы.

где $0 < \gamma < 2$, $g(t) \in L_{\frac{2}{\gamma}}(\Omega)$, $g_1(t) \in L(\Omega)$, а число a удовлетворяет неравенству $a < \frac{1}{\lambda_0}$, где λ_0– наибольшее собственное значение оператора A.

Столь пристальное внимание к квазидефинитным операторам объясняется их важностью для приложений. Рассмотрим, к примеру, задачу о собственных колебаниях упруго закреплённого стержня постоянного сечения, следуя (Коллатц, 1968, с. 35–38).

Соответствующая математическая модель имеет вид

$$\begin{cases} y^{IV} = \lambda y, \\ y''(0) = 0; (\alpha y'')'(0) + cy(0) = 0, \\ y''(1) = 0; (\alpha y'')'(1) - cy(1) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где c – коэффициент жёсткости закрепления, α – изгибная жёсткость стержня.

Для определения собственных значений $\lambda = k^4$ стандартным образом приходят к трансцендентному уравнению

$$\left(cthk - ctgk - \frac{2c}{\alpha k^3}\right)\left(tgk + thk - \frac{2c}{\alpha k^3}\right) = 0,$$

из которого при $c < 0$ получается два отрицательных и бесконечно много положительных значений λ. Эти значения можно трактовать, как собственные значения линейного оператора A, порождённого задачей (23).

6. О вкладе М.А. Красносельского в развитие приближённых методов решения нелинейных операторных уравнений

Перейдём к следующей теме исследований, восходящей к работам И. Ньютона второй половины XVII в. (Newton, 1669). Основная сложность построения приближённых решений операторных уравнений в XX веке состояла в обосновании сходимости метода и определении её скорости (Богатов, 2025, § 8.1-8.2). После Канторовича, который стал использовать для этих целей теорию полуупорядоченных пространств (Канторович, 1948) ситуация существенно улучшилась. По его словам,

«*Теория основывалась на идее связи данного пространства, в котором задано исследуемое уравнение, с некоторым более простым, в которое исходное пространство отображается. На основе исследования «приближённого уравнения» в более простом пространстве открывалась возможность строить и изучать конкретные приближённые методы в исходном пространстве*...» (Канторович, 1987, с.207).

Указанная идея Канторовича была реализована М.А. Красносельским (1950), который задействовал топологический инструментарий в обосновании приближённых методов. Принципиальный момент в его рассуждениях заключался в переходе от уравнения

$$Ax = x, \quad (24)$$

где A – вполне непрерывный оператор, к приближённому уравнению, аппроксимирующему уравнение (24)

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{x}, \quad (25)$$

который можно трактовать, как гомотопный переход от векторного поля

$$\boldsymbol{\Phi} = I - A, \quad (26)$$

отвечающего уравнению (24), к векторному полю $\bar{\boldsymbol{\Phi}} = I - \bar{A}$, соответствующему уравнению (25) с привлечением к исследованию этого поля теории индекса.

Будем предполагать, что уравнение (24) имеет изолированное[15] решение x_0 ненулевого индекса (индекс решения – это индекс неподвижной точки x_0 векторного поля $\boldsymbol{\Phi}$ в (26)). Чтобы дать определение приближённого решения в рамках проекционного метода, Красносельский рассмотрел последовательность конечномерных подпространств $\boldsymbol{L_1} \subset \boldsymbol{L_2} \subset \ldots \subset \boldsymbol{L_n} \subset \ldots$ E возрастающей размерности таких, что множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ плотно в банаховом пространстве E (Красносельский, 1950, с. 1121). Соответствующая последовательность

[15] Если x_0 – не единственное решение уравнения $x_{n+1} = Ax_n$, то предполагается, что рассуждения проводятся для некоторого шара $B \subset E$, в котором нет других решений уравнения (24), кроме x_0.

линейных проекционных операторов $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ с равномерно ограниченными нормами удовлетворяет условию

$$P_n E = L_n.$$

Тогда приближённым решением x_n уравнения (25) можно назвать решение аппроксимирующего уравнения

$$x = P_n A x. \qquad (27)$$

Для обоснования проекционного метода необходимо было получить ответы на следующие вопросы:

1. Существуют ли при достаточно больших n решения уравнения (27)?
2. Сходятся ли приближённые решения к x_0?
3. Какова скорость сходимости, определённой в предыдущем пункте?

Для ответа на первый вопрос достаточно, как показал М.А. Красносельский, рассмотреть векторные поля $\boldsymbol{\Phi}$ из (26) и $\bar{\boldsymbol{\Phi}} = I - P_n A$ с вполне непрерывным оператором A на границе S шара B. Вращение поля $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ на S ($\gamma(\boldsymbol{\Phi}, S)$) равно индексу неподвижной точки этого поля в шаре B и при больших n ($n \geq n_0$), в силу определения вращения векторного поля (см. § 3) справедливо равенство $\gamma(\boldsymbol{\Phi}, S) = \gamma(\bar{\boldsymbol{\Phi}}, S \cap L_n) \neq 0$. Таким образом, уравнение (27) имеет решения x_n в области $S \cap L_n$, что даёт положительный ответ на вопрос № 1, причём в безметрическом виде.

Оценка нормы разности $\|x - P_n A x\|$, проведённая Красносельским на основе аппроксимации компактного множества AB_1 элементами подпространства L_n, где $B_1 = \overline{B \setminus B_\varepsilon}$ – «шаровой слой», B_ε – шар малого радиуса ε с центром в точке x_0, позволила получить неравенство $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ (Красносельский, 1956а, с. 173).

Таким образом, ответ на второй вопрос также утвердителен и оказалась верной

Теорема 5. *Приближённые решения x_n при $n \geq n_0$ существуют и стремятся к решению исходной задачи при увеличении n.*

При этом, если предположить, что оператор A непрерывно дифференцируем в окрестности x_0, то приближённое уравнение имеет в шаре B (при больших n) *единственное* решение.

Для оценки быстроты сходимости приближённых решений x_n оказалось естественно сравнивать её со сходимостью «ряда Фурье»

$$P_1 x_0 + (P_2 - P_1)x_0 + (P_3 - P_2)x_0 + \cdots$$

Этот путь привёл Красносельского к доказательству следующей теоремы

Теорема 6. *Пусть оператор A имеет в точке x_0 производную Фреше $\boldsymbol{B}$, для которой единица не является собственным значением. Тогда быстрота сходимости приближённых решений x_n к x_0 характеризуется неравенством:*

$$\|x_n - x_0\| \leq (1 + \varepsilon_n)\|P_n x_0 - x_0\|,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Возвращаясь к исследованиям Канторовича, отметим, что он сосредоточил своё внимание, в основном, на теоретическом обосновании абстрактного метода Ньютона, которое базировалось (в том или ином виде) на идее мажорирования. Данная идея получила своё дальнейшее развитие в рамках теории конусов (см. § 2) в работах М.А. Красносельского и его учеников конца 1960-х гг. Если образовать последовательности

$$v_{n+1} = A v_n, \; w_{n+1} = A w_n, \; n = 0,1,2,\ldots, \qquad (28)$$

удовлетворяющие условию

$$A v_0 \geqslant v_0, \; A w_0 \leqslant w_0, \qquad (29)$$

то первая их них будет в силу (29) монотонно возрастать и ограничена сверху, а вторая – монотонно убывает и ограничена снизу. Тогда сходимость $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$ будет обеспечена пра-

вильностью[16] конуса, а непрерывность A (если таковая имеется) позволит перейти к пределу в равенствах (28).

Сформулируем вышесказанное в виде теоремы (Красносельский и др., 1969, с. 48).

Теорема 7. *Пусть конус K – правильный и непрерывный на конусном отрезке $\langle v_0, w_0 \rangle$ и монотонный оператор A преобразует этот отрезок в себя. Тогда последовательности* (28) *сходятся к неподвижным точкам оператора A.*

Таким образом, для построения сходящихся к неподвижной точке монотонного оператора A последовательных приближений достаточно установить существование элементов v_0, w_0, удовлетворяющих соотношению (29) и уметь их находить. Как отметил М.А. Красносельский в (Красносельский, 1969, с. 49), в качестве левой границы конусного отрезка $\langle v_0, w_0 \rangle$ можно выбрать нулевой элемент пространства E, а для построения его правой границы удобно пользоваться мажорантами оператора A.

Интересно отметить, что для вполне непрерывных, гладких операторов A, действующих в гильбертовом пространстве с конусом и имеющих точку бифуркации $\lambda=\lambda_0$, Красносельским и его учеником И.А. Бахтиным был предложен метод приближённого нахождения малых решений уравнения

$$x = \lambda A x.$$

Точнее говоря, при близких к λ_0 и больших λ_0 значениях λ указанные решения являются пределами последовательных приближений

$$x_n(\lambda) = \mu A x_{n-1}(\lambda) \qquad n = 1,2,\ldots,$$

где $\mu \in \left(\frac{1}{\lambda_0}; \frac{1}{\lambda_0} + \alpha\right)$, $\alpha > 0$ (Бахтин и др., 1961, с. 329). При этом оператор A должен представляться в виде трёх слагаемых

$$A = B + C + D,$$

где B – производная Фреше оператора A в точке θ (самосопряжённый линейный оператор, имеющий простое собственное значение λ_0 – его спектральный радиус); C и D – операторы, удовлетворяющие условию Липшица, первый из которых однороден ($C(\alpha\varphi) = \alpha^k C\varphi, \quad k > 1$), а второй имеет порядок малости больше, чем k относительно φ. Кроме того, оператор C должен быть вогнутым.

Отметим, что в контексте обоснования метода последовательных приближений для уравнения (24) Красносельским была доказана теорема о неподвижной точке для оператора

$$A=B+C,$$

где B – вполне непрерывный, C – сжимающий оператор, если известно, что оператор A оставляет инвариантным замкнутое ограниченное множество банахова пространства (Красносельский, 1955). Эта тема нашла своё продолжение в работах ученика Красносельского Б.Н. Садовского (Богатов, 2025, § 5.5).

К приближённым методам стоит также отнести нахождение малых решений уравнения (3) в виде рядов, в том числе с использованием диаграммы Ньютона, что также входило в круг научных интересов Красносельского (Красносельский, 1969, гл. 5). Описание его достижений в этой области изложено в (Богатов, 2025, гл. 6).

Заключение

О значительности вклада М.А. Красносельского в развитие функционального анализа за всю его жизнь свидетельствует количество изданным им монографий (14 шт., см. (Красносельский, 2000)), которые были без исключения переведены на иностранные языки. Подчеркнём, что ряд результатов М.А. Красносельского, как например, теорема о неподвижной точке или бифуркационная теорема, остаются востребованными даже в XXI веке (Liu et al., 2008), (Brown, 2014). Отметим также, что помимо чисто научных дарований, Красносельский обладал недюжинным педагогическим талантом. За время работы в ВГУ он

[16] Конус К называется правильным, если в нём каждая монотонная и ограниченная последовательность x_n $(x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_n \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq z_0)$ сходится по норме.

подготовил более 20 учеников[17], значительная часть которых защитили впоследствии докторские диссертации. Ряд последователей М.А. Красносельского остались в Воронеже (Ю.Г. Борисович, А.И. Перов, Ю.В. Покорный, Б.Н. Садовский, В.В. Стрыгин и др.), став, со временем, профессорами и заведующими кафедрами ВГУ на математическом факультете или факультете ПММ. Они составили ядро воронежской школы функционального анализа после отъезда Красносельского в Москву. Другая часть его учеников (П.П. Забрейко, Ю.С. Колесов, В.Ш. Бурд, А.Ю. Левин) перешла на работу в Ярославский государственный университет (Забрейко, 2000, с. 48), образовав там «отделение» воронежской математической школы. В.В. Стрыгин стал профессором в г. Куйбышеве, создан там свою школу нелинейного функционального анализа (1972-1985), а уже потом вернулся в Воронеж. Часть учеников Красносельского уехала вместе с Учителем из Воронежа в Москву, в Институт Проблем Управления (Н.А. Бобылёв, А.В. Покровский, А.В. Соболев, В.С. Козякин, И.В. Емелин и др.), где стали развиваться новые научные направления. Ещё два ответвления школы Красносельского возникли в Таджикистане (Э.М. Мухамадиев, В.Я. Стеценко), и Эстонии (Г.М. Вайникко[18]). Здесь же следует упомянуть ленинградскую школу функционального анализа, созданную одним из первых учеников М.А. Красносельского А.И. Поволоцким (рис. 6).

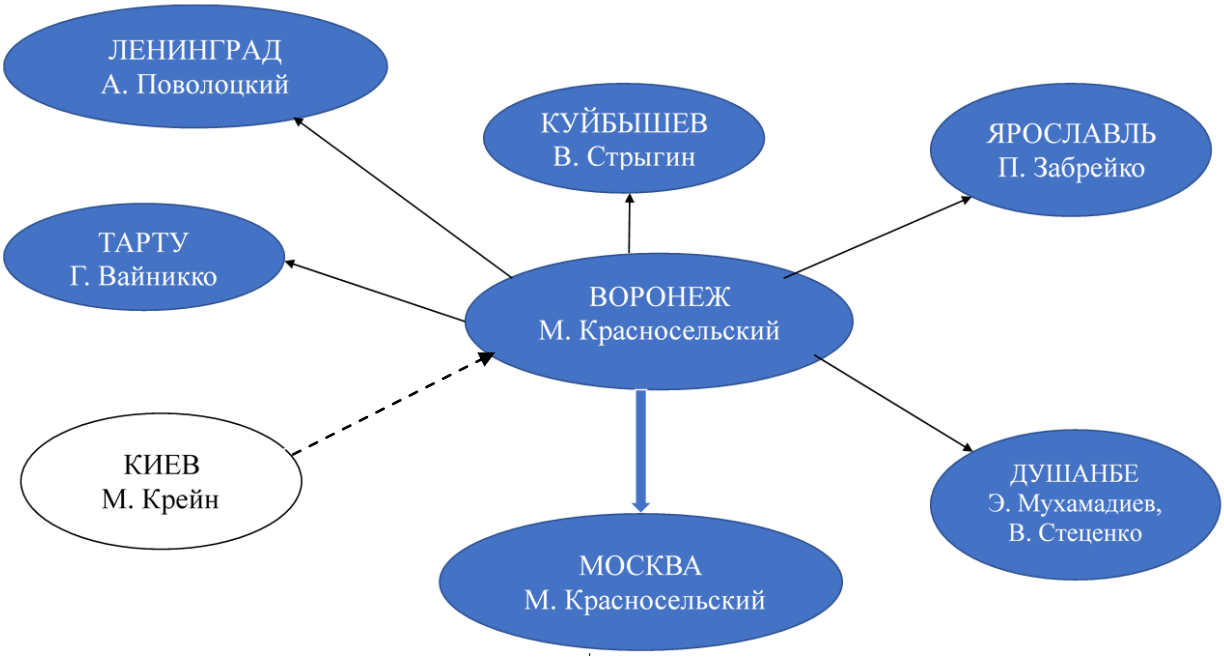

Рис. 6. Ответвления от школы М.А. Красносельского

Вместе с указанными в настоящей статье разделами нелинейного функционального анализа (теория положительных операторов, вариационные и топологические методы нелинейного анализа, теория ветвления и бифуркаций, приближённые методы решения нелинейных операторных уравнений), Красносельский также разрабатывал разделы линейного функционального анализа (в том числе в рамках теории конусов (Красносельский, 1962)), а также теорию колебаний (Красносельский, 1970) и теорию гистерезиса (Красносельский и др., 1983), о чём следовало бы написать отдельную статью. Надеюсь, что к следующему юбилею Марка Александровича эта работа будет сделана.

[17]https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=73939

[18] В 1990-м году Г.М. Вайникко был избран академиком Эстонской Академии наук.

Список литературы

Асарин Е.А., Бахтин И.А и др. Памяти М.А. Красносельского (некролог). 1997. [Интернет-ресурс]. Режим доступа URL: http://www.krasnoselskii.iitp.ru/obitrus.html (дата обращения 06.08.2025)

Бахтин И.А., Красносельский М.А. К задаче о продольном изгибе стержня переменной жёсткости // ДАН СССР. 1955. Т.105. № 4. С. 621–624.

Бахтин И.А., Красносельский М.А. Метод последовательных приближений в теории уравнений с вогнутыми операторами // Сибирский мат. журнал. 1961. Т. 2. № 3. С. 313–330.

Богатов Е.М. М.А. Красносельский – человек, педагог, математик. Интервью с М.И. Каменским от 29.01.2020, неопубликованная часть.

Богатов Е.М. Об истории положительных операторов (1900-е–1960-е гг.) и вкладе М.А. Красносельского // Научные ведомости БелГУ. Сер. Прикладная матем., физ. 2020a. Т. 52. № 2. С. 105–127.

Богатов Е.М. Об истории вращения векторных полей / Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2020. М.: ИИЕТ РАН. 2020b. С. 166–170.

Богатов Е.М. Очерки по истории и предпосылкам развития нелинейного функционального анализа до начала 1970-х гг. и достижений российских и советских математиков: монография / Под ред. А.В. Боровских. М.: РУСАЙНС, 2025.

Богатов Е.М., Боровских А.В. Математические мыслительные средства в истории математики (на материале теории положительных операторов) // Вопросы истории естествознания и техники. 2025. Т. 46. № 2. С. 235–251.

Богатов Е.М., Лагачева А.А., Новикова М.Е. О некоторых малоизвестных подробностях жизни математика М.А. Красносельского в годы ВОВ / Будущее науки - 2020: Сб. научных статей 8-й Международной молодежной научной конф.: в 5 томах, Курск, 21–22 апреля 2020 года. Том 2. Курск: Юго-Западный гос. университет, 2020. С. 29-32.

Богатов Е.М., Мухин Р.Р. О развитии нелинейных интегральных уравнений на раннем этапе и вкладе отечественных математиков // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 312–345.

Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: ГИТТЛ. 1956.

Гриценко В.А. «Человеческое существование без математики сегодня трудно, а завтра будет просто невозможно». Интервью с доктором физ.-мат. наук, профессором НИУ ВШЭ В.А. Гриценко 08.08.2025 [Интернет-ресурс]. Режим доступа URL: https://www.hse.ru/news/1074247874.html (дата обращения 22.08.2025)

Забрейко П.П. М.А. Красносельский – мой учитель и друг / В сб. Марк Александрович Красносельский. К 80-летию со дня рождения. М.: ИППИ РАН. 2000. С.28–54.

Забрейко П.П., Красносельский М.А. О вычислении индекса изолированной неподвижной точки вполне непрерывного векторного поля // Доклады АН СССР. 1961. Т.141:2. С. 292–295.

Забрейко П.П., Красносельский М. А. Вычисление индекса неподвижной точки векторного поля // Сиб. матем. журн. 1964. Т.5:3. С. 509–531.

Забрейко П.П., Красносельский М.А., Покровский А.В. К задаче о точках бифуркации // Проблемы математического анализа сложных систем. Вып. 2. Воронеж. ВГУ. 1968. С. 41–56.

Зельдович Я.Б. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе. М: Наука, 1980.

Митропольский Ю.А., Бреус К.А. Институт математики Академии наук УССР к пятидесятилетию Советской власти // Украинский математический журнал. 1967. Том 19. С. 3–15.

Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи математических наук. 1948. Т. 3:6. № 28. С. 89–185.

Канторович Л.В. Мой путь в науке (предполагавшийся доклад в Московском математическом обществе) // Успехи математических наук. 1987. Т. 42:2. № 254. С. 183–213.

Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968.

Колмогоров А.Н., Красносельский М.А. Марк Григорьевич Крейн (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи математических наук. 1958. Том 13. Выпуск 3(81). С. 213–224.

Красносельский М.А. Исследования по нелинейному функциональному анализу: диссертация ... доктора физико-математических наук: 01.00.00. Киев, 1950.

Красносельский М.А. Сходимость метода Галёркина для нелинейных уравнений // ДАН СССР. 1950a. Т. 73. № 6. С. 1121–1124.

Красносельский М.А. К задаче о точках бифуркации // ДАН СССР. 1951a. Т. 79. № 3. С. 389–392.

Красносельский М.А. К теории вполне непрерывных векторных полей // Украинский мат. журнал. 1951b. Т. III. № 2. С. 174–183.

Красносельский М.А. Расщепление операторов, действующих из пространства L^q в пространство L^p. // ДАН СССР. 1952. LXXXII. 3. С. 333–336.

Красносельский М.А. Новые теоремы существования решений у нелинейных интегральных уравнений // ДАН СССР. 1953. Т. 88. № 6. С. 949–952.

Красносельский М.А. Некоторые задачи нелинейного анализа // Успехи математических наук. 1954. Т.9:3. № 61. С. 57–114.

Красносельский М.А. Топологические методы в теории интегральных уравнений. М.: ГИТЛ. 1956.

Красносельский М.А. Об уравнении Некрасова в теории волн на поверхности тяжёлой жидкости // ДАН СССР. 1956a. Т. 109. С. 456–459.

Красносельский М.А. Рассмотрение спектра нелинейного оператора в окрестности точки бифуркации и применения к задаче о продольном изгибе сжатого стержня // Успехи математических наук. 1957. Т. 12:1. № 73. С. 203–208.

Красносельский М.А. Неподвижные точки операторов, сжимающих или растягивающих конус // ДАН СССР. 1960. 135:3. С. 527–530.

Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962.

Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970.

Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

Красносельский М.А., Ладыженский Л.А. Структура спектра положительных неоднородных операторов // Труды ММО. 1954. Вып. 3. С. 321–346.

Красносельский М.А. Два замечания о методе последовательных приближений //Успехи математических наук. 1955. Т.10:1. № 63. С. 123–127.

Красносельский М.А., Люстерник Л.А. О топологических методах нелинейного анализа // Труды III Всесоюзного Математического съезда. Москва. 1958. Том 3. С. 373–383.

Красносельский М.А., Поволоцкий А.И. К вариационным методам в задаче о точках бифуркации // ДАН СССР. 1953. Т. 91. №1. С. 19 –22.

Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.

Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: ГИФМЛ. 1958.

Красносельский М.А., Стеценко В.Я. О некоторых нелинейных задачах, имеющих много решений // Сиб. мат. Журнал. 1963. 4.1. С. 120–137.

Красовский Ю.П. К теории установившихся волн немалой амплитуды // ДАН СССР. 1960. 130:6. С. 1237–1240.

Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи математических наук. 1948. Т. 3:1. № 23. С. 3–95.

Митропольский Ю.А., Бреус К.А. Институт математики Академии наук УССР к пятидесятилетию Советской власти // Украинский математический журнал. 1967. Том 19. С. 3–15.

Марк Александрович Красносельский. К 80-летию со дня рождения. Сб. статей. М.: ИППИ РАН. 2000.

Назаров Н.Н. Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна // Труды Среднеазиат. гос. ун-та. Серия V-a. Математика. 1941. Вып. 33. С. 1–79.

Некрасов А.И. О волнах установившегося вида. Гл.2. О нелинейных интегральных уравнениях // Изв. Иваново-Вознесен. политехн. ин-та. 1922. Вып. 6. С. 155–171.

Немыцкий В.В. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений // Матем. сборник. 1934. Т.41. №3. С.421–452.

Немыцкий В.В. Об одном общем классе нелинейных интегральных уравнений // Матем. сборник. 1934а. Т.41. № 4. С.655–658.

Покорный Ю.В. О *B*-положительных и *B*-монотонных операторах // Проблемы мат. анализа сложных систем. ВГУ. 1967. Вып. 1. С. 58–63.

Покорный Ю.В. Краткий очерк научной, педагогической и общественной деятельности С.И. Соболева / В сб. Владимир Иванович Соболев в воспоминаниях коллег и учеников. К 100-летию со дня рождения. Воронеж: Наука-Юнипресс, 2014. С. 79–82.

Самойленко А.М. Н.Н. Боголюбов и нелинейная механика // Успехи математических наук. 1994. 49:5(299). С. 103–146.

Ясинский Ф.С.Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. М.: ГИТТЛ, 1952.

Amann H. On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces // Journal of functional analysis. 1972. Vol. 11. Iss. 3. Pp. 346–384.

Brouwer L. E. J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten // Math. Annal. 1912. 71. 97–115.

Brown R.F. The Krasnoselskii–Rabinowitz Bifurcation Theorem. In: A Topological Introduction to Nonlinear Analysis. Birkhäuser, Cham, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-319-11794-2_22

Golomb M. Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen. Math. Zeitschrift. 1935. V. 39. 45–75.

Howlett J. (2025) New Proofs Probe the Limits of Mathematical Truth // Qunta magazine (Online) URL: https://www.quantamagazine.org/new-proofs-probe-the-limits-of-mathematical-truth-20250203/ Accessed 22.08.2025

Kwong M.K. The topological nature of Krasnoselskii's cone fixed point theorem // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2008. V. 69. Iss. 3. Pp. 891–897.

Laetsch T. On the number of solutions of boundary value problems with convex nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 35 (1971). Pp. 389-404.

Leray J. , Schauder J. Topologie et équations fonctionnelles // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1934. V. 6. Pp. 45–73.

Lichtenstein L. Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen / Julius Springer. Berlin. 1931.

Liu Y., Li Z. Krasnoselskii type fixed point theorems and applications // Proceedings of the American Mathematical Society. 2008. V. 136. Iss. 4. Pp. 1213-1220. DOI: 10.1090/S0002-9939-07-09190-3

Newton I. De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas (1669). [Интернет-ресурс]. https://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204

Orlicz W. Über Räume (L_M) // Bull. Intern, de L'Acad. Pol. Cracovie. 1936. serie A. Pp. 93–107.

Rabinowitz P.H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems // Journal of functional analysis. 1971. V. 7. Iss. 3. Pp. 487–513.

Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // J. Reine Angew. Math. 1909. V. 135. Pp. 1–61.

Rothe E. Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen // Compos. Math. 1938. V. 5. Pp. 177–197.

Rothe E. Weak topology and nonlinear integral equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 66. Pp. 75–92.

Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. Math. Zeitschr. 1927. V. 26. №. 1. 47–65.

Ziedler E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems. Springer. New York. 1993.

Информация об авторе

Богатов Егор Михайлович; кандидат физико-математических наук; доцент; доцент кафедры высшей математики и информатики «Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал)» (Российская Федерация, 309516, г. Старый Оскол, Белгородская обл., м-он им. Макаренко, д. 42); доцент кафедры горного дела; Филиал НИТУ «МИСИС» в г. Губкине Белгородской области (Российская Федерация, 309186, г. Губкин, Белгородская область, ул. Комсомольская, д. 16); E-mail: embogatov@inbox.ru; ORCID: 0000-0002-4897-0394

AN ESSAY ON THE ACHIEVEMENTS OF M.A. KRASNOSELSKII IN THE FIELD OF NONLINEAR FUNCTIONAL ANALYSIS (1950S–1960S)

Bogatov E. M.
PhD (Mathematics),
Associate Professor

Branch of National Research University of Science and Technology “MISIS” in Gubkin town of Belgorod Region;
Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology “MISIS”

Abstract. This paper investigates the seminal work of M.A. Krasnoselskii in the field of nonlinear functional analysis; the chronological framework of the study covers the period from the late 1940s to the late 1960s. The analysis of the results of the founder of the Voronezh mathematical school is carried out from the historical-mathematical perspective with reference to the works of his predecessors: P.S. Urysohn, A.I. Nekrasov, V. Orlicz, J. Schauder, J. Leray, M. Golomb, L.V. Kantorovich, V.V. Nemytskii, M.G. Krein, M.A. Rutman, and others. The author uses several approaches to research of the scientific heritage of M.A. Krasnosel'skii: the presentist one, when his work is analyzed from the standpoint of modern mathematics, antiquarian one, when the context of the time of obtaining the result is used, and partly scientific-scholastic one. The latter involves evaluating the results of the main actor from the point of view of the implementation of the research program, including the achievements of his students. The following authors play their role here: Ya.B. Rutitskii, L.A. Ladyzhenskii, I.A. Bakhtin, A.I. Povolotskii, P.P. Zabreiko, Yu.V. Pokorny, and others. Particular attention is paid to the results obtained by M.A. Krasnosel'skii in the field of positive operator theory (analogs of the theorems of Urysohn and Rutman, the cone fixed point theorem, the theorem on the existence of several solutions in a cone, etc.), topological and variational methods (the fixed point principle, the critical point criterion, the bifurcation theorem, the index change principle, etc.), as well as

approximate methods for solving nonlinear operator equations (theorems on the convergence of the method of successive approximations in a cone, topological justification of the projection method, etc.). Variants of practical application of Krasnosel'skii's results in the field of nonlinear mechanics and wave theory are given.

Keywords: M.A. Krasnosel’skii, nonlinear functional analysis, Soviet mathematicians, Voronezh mathematicians

Acknowledgments: The author expresses gratitude to the head of the seminar "History of Voronezh Mathematics" S.N. Ushakov (Voronezh State University), who invited the author to give a report on the topic indicated in the title of the article; to the participants of this seminar for useful discussions, as well as to Professor A.M. Krasnoselskii for access to the electronic scientific archive of M.A. Krasnoselskii.

For citation: Bogatov E. M. (2025). An essay on the achievements of M.A. Krasnoselskii in the field of nonlinear functional analysis (1950s–1960s). *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 4(40), 119–143. doi.org/10.24888/2500-1957-2025-4-119-143

Copyright: © E. M. Bogatov (2025). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

Amann, H. (1972). On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces. *Joural of functional analysis*, 11:3, 346-384.

Asarin, E. A. et al. (1997). Pamyati M.A. Krasnosel'skogo (nekrolog). [Online]. Available at: http://www.krasnoselskii.iitp.ru/obitrus.html (accessed 06.08.2025) (In Russ.)

Bahtin, I. A., Krasnosel'skij, M. A. (1955). K zadache o prodol'nom izgibe sterzhnya peremennoj zhyostkosti [On the problem of longitudinal bending of a rod of variable rigidity]. *DAN SSSR*, 105:4, 621-624. (In Russ.)

Bahtin, I. A., Krasnosel'skij, M. A. (1961). Metod posledovatel'nyh priblizhenij v teorii uravnenij s vognutymi operatorami [The method of successive approximations in the theory of equations with concave operators]. *Sibirskij mat. zh.*, 2:3, 313-330. (In Russ.)

Bogatov, E. M. (2020). M.A. Krasnosel'skij – chelovek, pedagog, matematik. Interv'yu s M.I. Kamenskim ot 29.01.2020, neopublikovannaya chast'. (In Russ.)

Bogatov, E. M. (2020a). On the history of positive operators (1900s–1960s) and the contribution of M.A. Krasnosel’skii. *Applied Mathematics & Physics*, 52(2), 105-127. DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-2-105-127(In Russ., Abstract in Eng.)

Bogatov, E. M. (2020b). Ob istorii vrashcheniya vektornyh polej [On the history of rotation of vector fields]. *Institut istorii estestvoznaniya i tekhniki im. S.I. Vavilova. Godichnaya nauchnaya konferenciya* (pp. 166–170). Moscow: IIET RAN (In Russ.)

Bogatov, E. M. (2025). *Ocherki po istorii i predposylkam razvitiya nelinejnogo funkcional'nogo analiza do nachala 1970-h gg. i dostizhenij rossijskih i sovetskih matematikov : monografiya* [Essays on the history and prerequisites for the development of nonlinear functional analysis until the early 1970s and the achievements of Russian and Soviet mathematicians: monograph]. Moscow : Ru-Science. (In Russ.)

Bogatov, E. M., Borovskih, A. V. (2025). Mathematical Thinking Tools in the History of Mathematics (Based on the Theory of Positive Operators). *Studies in the History of Science and Technology*, 46 (2), 235–251. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: 10.31857/S0205960625020021

Bogatov, E. M., Lagacheva, A. A., Novikova, M. E. (2020). O nekotoryh maloizvestnyh podrobnostyah zhizni matematika M.A. Krasnosel'skogo v gody VOV [About some little-known details of the life of mathematician M.A. Krasnosel'skii during the Great Patriotic War]. *Budushchee nauki - 2020: Sb. nauchnyh statej 8-j Mezhdunarodnoj molodezhnoj nauchnoj konf.: v 5 tomah, Kursk, 21–22 aprelya 2020 goda. Tom 2*. (pp. 29-32). Kursk: Yygo-Zapadnyj gos. universitet (In Russ.)

Bogatov, E. V., Mukhin, R. R. (2021). On the development of nonlinear integral equations at the early stage and the contribution of domestic mathematics. *Chebyshevskii Sb*., 22:3, 311–344. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-22-3-311-344.

Brouwer, L. E. J. (1912). Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71, 97–115.

Collatz, L. (1968). *Zadachi na sobstvennye znacheniya* [Eigenvalue problems], Moscow: Nauka.

Golomb, M. (1935). Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen. *Mathematische Zeitschrift*, 39, 45–75.

Gritsenko, V. A. (2025). «Chelovecheskoe sushchestvovanie bez matematiki segodnia trudno, a zavtra budet prosto nevozmozhno». Interv'iu s doktorom fiz.-mat. nauk, professorom NIU VShE V.A. Gritsenko. ['Human existence without mathematics is difficult today, and tomorrow it will be simply impossible'. An interview with Professor V.A. Gritsenko]. *HSE University News*. 8 August. Available at: https://www.hse.ru/news/1074247874.html (Accessed: 22 August 2025).

Howlett, J. (2025). New Proofs Probe the Limits of Mathematical Truth // Qunta magazine (Online) URL: https://www.quantamagazine.org/new-proofs-probe-the-limits-of-mathematical-truth-20250203/ Accessed 22.08.2025

Kantorovich, L. V. (1948). Funktsional'nyi analiz i prikladnaya matematika [Functional analysis and applied mathematics]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 3(6), 89–185. (In Russ.)

Kantorovich, L. V. (1987). My path in science (intended report at the Moscow Mathematical Society). *Russian Math. Surveys*, 42:2, 233–270.

Kolmogorov, A. N., Krasnosel'skii, M. A. (1958). Mark Grigor'evich Krein (k pyatidesyatiletiyu so dnya rozhdeniya) [Mark Grigorievich Krein (on his 50th birthday)]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 13(3), 213–224. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1950). *Issledovaniya po nelineinomu funktsional'nomu analizu* [Research on nonlinear functional analysis]. Doctoral dissertation, Kiev. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1950a). Skhodimost' metoda Galerkina dlya nelineinykh uravnenii [Convergence of the Galerkin method for nonlinear equations]. *Doklady AN SSSR*, 73 (6), 1121–1124. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1951a). K zadache o tochkakh bifurkatsii [On the Problem of Bifurcation Points]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* , 79(3), 389-392. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1951b). K teorii vpolne nepreryvnykh vektornykh polei' [On the theory of completely continuous vector fields]. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal*, 3(2), 174–183. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1952). Rasshcheplenie operatorov, deistvuyushchikh iz prostranstva L^q v prostranstvo L^p [Splitting of operators acting from the space L^q to the space L^p]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 82(3), 333–336. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1953). Novye teoremy sushchestvovaniya reshenii u nelineinykh integral'nykh uravnenii [New existence theorems for solutions of nonlinear integral equations]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 88(6), 949–952. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1954). Nekotorye zadachi nelineinogo analiza [Some problems of nonlinear analysis]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 9(3), 57–114. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1955). Dva zamechaniya o metode posledovatel'nyh priblizhenij [Two remarks on the method of successive approximations]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 10 (1), 123–127. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1956). *Topologicheskie metody v teorii integral'nykh uravnenii* [Topological methods in the theory of integral equations]. Moscow: GITL. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1956a). Ob uravnenii Nekrasova v teorii voln na poverkhnosti tyazheloi zhidkosti [On Nekrasov's equation in the theory of waves on the surface of a heavy fluid]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 109, 456–459. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1957). Rassmotrenie spektra nelineinogo operatora v okrestnosti tochki bifurkatsii i primeneniya k zadache o prodol'nom izgibe szhatogo sterzhnya [Study of the spectrum of a nonlinear operator near a bifurcation point and applications to the problem of longitudinal bending of a compressed rod]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 12(1), 203–208. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1960). Nepodvizhnye tochki operatorov, szhimayushchikh ili rastyagivayushchikh konus [Fixed points of cone-compressing or cone-stretching operators]. *Doklady AN SSSR*, 135(3), pp. 527–530. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. (1962). *Polozhitel'nye resheniya operatornykh uravnenii* [Positive solutions of operator equations]. Moscow: FIZMATGIZ. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. et al. (1969). *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii* [Approximate solution of operator equations], Moscow: Nauka. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A. et al. (1970). *Nelineinye pochti periodicheskie kolebaniya* [Nonlinear almost periodic oscillations]. Moscow: Nauka. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A., Ladyzhenskii, L. A. (1954). Struktura spektra polozhitel'nykh neodnorodnykh operatorov [Structure of the spectrum of positive inhomogeneous operators]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, 3, 321–346. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A., Lyusternik, L. A. (1958). O topologicheskikh metodakh nelineinogo analiza, *Trudy Tret'ego Vsesoyuznogo Matematicheskogo s"ezda*, 3 373–383. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A., Povolotskii, A. I. (1953). K variatsionnym metodam v zadache o tochkakh bifurkatsii [On variational methods in the problem of bifurcation points]. *Doklady Akademii Nauk*, 91(1), 19–22. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A., Pokrovskii, A. V. (1983). *Sistemy s gisterezisom* [Systems with Hysteresis]. Moscow: Nauka. (In Russ.)

Krasnosel'skii, M. A., Rutitskii, Ya. B. (1958a). *Vypuklye funktsii i prostranstva Orlicha* [Convex functions and Orlicz spaces]. Moscow: GIFML. (In Russ.).

Krasnosel'skii, M. A., Stetsenko, V. Ya. (1963). O nekotorykh nelineinykh zadachakh, imeyushchikh mnogo reshenii [On some nonlinear problems with multiple solutions]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 4 (1), 120–137. (In Russ.)

Krasovskii, Yu. P. (1960). *K teorii ustanovivshikhsya voln nemaloi amplitudy* [On the theory of steady waves of finite amplitude]. *Doklady AN SSSR*, 130 (6), 1237–1240. (In Russ.).

Krein, M. G., Rutman, M. A. (1948). Lineinye operatory, ostavlyayushchie invariantnym konus v prostranstve Banakha [Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 3 (1), 3–95. (In Russ.)

Kwong, M. K. (2008). The topological nature of Krasnoselskii's cone fixed point theorem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69 (3), 891–897.

Laetsch, T. (1971). On the number of solutions of boundary value problems with convex nonlinearities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35, 389–404.

Leray, J., Schauder, J. (1934). Topologie et équations fonctionnelles. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 6, 45–73.

Lichtenstein, L. (1931). *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen*. Berlin: Julius Springer.

Liu, Y., Li, Z. (2008). Krasnoselskii type fixed point theorems and applications. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136 (4), 1213-1220. DOI: 10.1090/S0002-9939-07-09114-1.

Mark Aleksandrovich Krasnosel'skii. K 80-letiyu so dnya rozhdeniya [Mark Aleksandrovich Krasnosel'skii. On the 80th anniversary of his birth] (2000). Moscow: IPPI RAN.

Mitropol'skij, Yu. A., Breus K. A. (1967). Institut matematiki Akademii nauk USSR k pyatidesyatiletiyu Sovetskoj vlasti, *Ukrainskij matematicheskij zhurnal*, 19, 3-15.

Nazarov, N. N. (1941). *Nelineinye integral'nye uravneniya tipa Gammershteina* [Nonlinear integral equations of Hammerstein type]. *Trudy Sredneaziatskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya V-a. Matematika*, 33, 1–79. (In Russ., Abstract in Eng.)

Nekrasov, A. I. (1922). *O volnakh ustanovivshegosya vida. Gl.2. O nelineinykh integral'nykh uravneniyakh* [On steady waves. Ch.2. On nonlinear integral equations]. *Izvestiya Ivanovo-Voznesenskogo politekhnicheskogo instituta*, 6, 155–171. (In Russ.)

Nemytskii, V. V. (1934). *Teoremy sushchestvovaniya i edinstvennosti dlya nelineinykh integral'nykh uravnenii* [Existence and uniqueness theorems for nonlinear integral equations]. *Matematicheskii sbornik*, 41 (3), 421–452. (In Russ., Abstract in French)

Nemytskii, V. V. (1934a). *Ob odnom obshchem klasse nelineinykh integral'nykh uravnenii* [On a general class of nonlinear integral equations]. *Matematicheskii sbornik*, 41 (4), 655–658. (In Russ., Abstract in French)

Newton, I. (1669). *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas* [Online]. Available at: https://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204 (Accessed: 5 August 2025).

Orlicz, W. (1936). Über Räume (L_M), *Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A*, 93–107.

Pokornyi, Yu. V. (2014). Kratkii ocherk nauchnoi, pedagogicheskoi i obshchestvennoi deiatel'nosti S.I. Soboleva, in Collection: *Vladimir Ivanovich Sobolev v vospominaniiakh kolleg i uchenikov. K 100-letiiu so dnia rozhdeniia*. Voronezh: Nauka-Unipress, 79-82. (In Russ.)

Pokornyi, Yu. V. (1967). *O B-polozhitel'nykh i B-monotonnykh operatorakh* [On *B*-positive and *B*-monotone operators]. *Problemy matematicheskogo analiza slozhnykh sistem*, 1, 58–63. (In Russ.)

Rabinowitz, P. H. (1971). Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *Journal of Functional Analysis*, 7 (3), 487–513.

Ritz, W. (1909). Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 135, 1–61.

Rothe, E. (1938). Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen. *Compositio Mathematica*, 5, 177–197.

Rothe, E. (1949). Weak topology and nonlinear integral equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 66, 75–92.

Samoilenko, A. M. (1994). N.N. Bogolyubov and non-linear mechanics. *Russian Math. Surveys*, 49:5, 109–154.

Schauder, J. (1927). Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. *Mathematische Zeitschrift*, 26 (1), 47–65.

Vajnberg, M. M. (1956). *Variacionnye metody issledovaniya nelinejnyh operatorov*. Moscow: GITTL. (In Russ.)

Yasinskii, F. S. (1952). *Izbrannye raboty po ustoichivosti szhatykh sterzhnei* [Selected works on the stability of compressed rods]. Moscow: GITTL.

Zabrejko, P. P. (2000). M.A. Krasnosel'skij – moj uchitel' i drug / V sb. *Mark Aleksandrovich Krasnosel'skij. K 80-letiyu so dnya rozhdeniya*. Moscow: IPPI RAN. 28–54. (In Russ.)

Zabrejko, P. P., Krasnosel'skij, M. A. (1961). O vychislenii indeksa izolirovannoj nepodvizhnoj tochki vpolne nepreryvnogo vektornogo polya [On the calculation of the index of an isolated fixed point of a completely continuous vector field]. *DAN SSSR*, 141:2, 292–295. (In Russ.)

Zabrejko, P. P., Krasnosel'skij, M. A. (1964). Vychislenie indeksa nepodvizhnoj tochki vektornogo polya [Calculating the index of a fixed point of a vector field]. *Sib. matem. zhurn.* 5:3, 509–531. (In Russ.)

Zabrejko, P. P., Krasnosel'skij, M. A, Pokrovskij A. V. (1968). K zadache o tochkah bifurkacii. *Problemy matematicheskogo analiza slozhnyh system*, 2, 41–56. (In Russ.)

Zeidler, E. (1993). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems*. New York: Springer.

Zel'dovich, Ya. B. et al. (1980). *Matematicheskaya teoriya goreniya i vzryva*. Moscow: GITTL. (In Russ.)

Information about the author

Yegor M. Bogatov; Candidate of Physico-Mathematical Sciences; Associate Professor; Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Computer Science at the Starooskolsky Technological Institute named after A.A. Ugarov (branch) (m-on. Makarenko, 42, Stary Oskol, Belgorod Region, 309516, Russian Federation); Associate Professor of the Department of Mining; Branch of NUST «MISIS» in Gubkin, Belgorod Region (Komsomolskaya St., 16, Gubkin, Belgorod Region, 309186, Russian Federation); E-mail: embogatov@inbox.ru; ORCID: 0000-0002-4897-0394

Статья поступила в редакцию 29.10.2025
Принята к публикации 27.11.2025
Статья опубликована 16.12.2025