

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-105-119

УДК
378.147**НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕМЕ
«ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ»****Спиридонов Михаил Яковлевич** | Московский политехнический
к.ф.-м.н., доцент | университет

Аннотация. Начальные сведения о линейных операторах и матрицах предлагается излагать в их единстве, в их неразрывной связи. При этом все формулы лучше давать в числовом (а не в буквенном) формате, что никак не ограничивает и не умаляет общности рассуждений, но делает их (и формулы, и рассуждения) понятными для большей части учащихся. Стандартные действия над линейными преобразованиями как над функциями порождают соответствующие операции над матрицами, что демонстрирует естественность их (операций) происхождения и, как следствие, делает общепринятыми. В частности, известное правило умножения матриц, кажущееся на первый взгляд искусственным, возникает при построении композиции линейных операторов. Это одна из серии статей автора, в которых показывается реализация одного из фундаментальных принципов обучения – каждое вновь вводимое понятие, определение, правило подсчёта и т. д. должно быть предварительно разумно мотивировано, чтобы не выглядеть для обучающегося непонятно откуда взявшимся.

Ключевые слова: линейное преобразование, матрица линейного оператора, действия над линейными преобразованиями, операции над матрицами и происхождение правил их выполнения

Для цитирования: Спиридонов М.Я. Некоторые методические замечания по теме «Операции над матрицами» // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 2 (42). С. 105–119. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-105-119

Права: © М.Я. Спиридонов (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Многие современные учебные курсы построены на дедуктивной организации содержания и демонстрируют формальную математическую строгость изложения. Однако это, само по себе похвальное, стремление к математической точности и пунктуальности затрудняет понимание учебного материала, особенно вчерашнему школьнику: ведь естественный процесс познания идёт от частного (от примеров) к общему, от конкретного к абстрактному. И учебный процесс должен строиться именно по этому принципу.

Главным концентром линейной алгебры являются линейные (или векторные) пространства и линейные преобразования (линейные операторы), действующие в этих пространствах. Конечно, в рамках линейной алгебры изучаются и другие математические объекты линейной природы, например, билинейные или, обобщая, полилинейные формы (тензоры) – функции нескольких переменных, линейные по каждому аргументу.

Учебный курс линейной алгебры начинается, как правило, с понятия матриц и действий над ними. При этом в большинстве учебных пособий (не говоря уж о руководствах

по решению задач) операции над матрицами вводятся формально, по готовым алгоритмам, без объяснения их происхождения. И если сложение матриц и умножение матрицы на число как-то не вызывают отторжения, то умножение матрицы на матрицу, введённое без комментариев о его источнике, смотрится довольно искусственным и требуют от учащегося слепого механического исполнения некоторой пошаговой инструкции. Аналогично, линейные операторы описываются абстрактно как отображения векторных пространств, сохраняющие линейные операции, а затем конкретные расчётные моменты возникают только в связи с их матрицами и матрицами преобразований базисов и координат.

Сказанное в полной мере относится к таким известным учебникам по линейной алгебре, как (Бугров, Никольский, 2004), (Ильин, Позняк, 2005), (Беклемишев, 2015), (Винберг, 2001), (Постников, 2009, ч. I, лекция 6, ч. II, лекция 15). Однако, надо отдать должное, в последующих главах в перечисленных учебных пособиях операции над матрицами связываются с операциями над линейными преобразованиями, при этом все пояснения даются в буквенной символике (которая не всегда приветствуется недавними школьниками) и, как правило, для операторов, действующих в векторных пространствах одинаковой размерности, то есть для квадратных матриц.

Отдельно стоит сказать об учебниках (Курош, 2021), (Смирнов, 2010), (Кострикин, 2004). В них изучение линейных операторов проводится в связке с их матрицами, и вводимые операции над линейными преобразованиями (как над функциями) сразу находят своё выражение в действиях над матрицами этих преобразований. Именно такой подход к изложению данной темы разделяется автором и реализуется в настоящей статье. Однако в указанных учебных пособиях (как и в отмеченных выше) всё объяснение учебного материала проводится в буквенной символике в пространствах общей размерности, почти без конкретных числовых примеров. К сожалению, такое изложение сегодня с трудом воспринимается многими студентами-первокурсниками, не привыкшими к осваиванию значительных объёмов абстрактного (пусть и математически формализованного) текста.

При обучении естественно всегда отталкиваться от простых примеров, моделей, закономерностей и т. д., которые должны быть ясны для среднестатистического учащегося. Здесь годятся и простейшие числовые примеры, и иллюстрации, и несложные логические схемы, которые делали бы понятными изучаемые объекты и вводимые понятия, показывали бы различные связи между ними, то есть раскрывали бы существо дела (пусть даже в самой простой, в самой примитивной ситуации). Применительно к преподаванию линейной алгебры это означает, что представление о линейных операторах ученик должен получить на простейших примерах с конкретными числовыми коэффициентами, понять, почему с помощью именно таких выражений (однородных многочленов первой степени от нескольких переменных) нужно задавать функции, чтобы они являлись линейными преобразованиями. И числовые матрицы различных размерностей здесь возникают как удобный объект, полностью описывающий задание линейного оператора (а не сами по себе и непонятно откуда взявшиеся, что зачастую практикуется на начальных этапах обучения матрицам, определителям и системам). Наконец, надо показать, что операции над матрицами возникают естественным образом как отражение привычных (и известных из школы) математических операций над функциями, применённых к линейным операторам. Системы линейных уравнений можно преподнести как порождение линейных преобразований: решение системы – это отыскание прообраза элемента при линейном отображении. В курсе элементарной математики источник появления систем уравнений другой: они часто возникают при построении математических моделей в так называемых текстовых задачах на движение, на работу и т. д.

Введённые операции над матрицами позволяют более наглядно и компактно записывать в матричной форме любые линейные преобразования, произвольные системы линейных уравнений, формировать композицию (произведение) линейных операторов. Чисто внешняя аналогия матричного уравнения $AX = B$ с обычным числовым уравнением

$ax = b$ привела к идентичному способу решения (в тех случаях, когда обратная матрица A^{-1} существует).

Одним из основных трендов автора в педагогической практике является обязательное объяснение на содержательном уровне появления тех или иных новых объектов, введения тех или иных понятий и определений, трактование тех или иных (как доказанных, так и приводимых без доказательства) фактов. Так, действия над линейными преобразованиями определяются (и на это следует обращать внимание учащихся) по тем же законам, что и известные из школьного курса действия над вещественнозначными функциями одной вещественной переменной. Операции над линейными преобразованиями приводят, в свою очередь, к (осуществляемым общепринятым способом) операциям над матрицами, делая понятным их происхождение, что особенно актуально для умножения матриц. Тезисы по рассматриваемой в статье тематике автор докладывал на конференции (Спиридонов, 2025).

С другими примерами подобного опыта автора можно ознакомиться по следующим публикациям. В статье (Спиридонов, 2022) показано, как при решении систем линейных уравнений возникает понятие определителя и способы его подсчёта, причём и специальные (через произведение диагоналей для второго порядка, правило треугольников для третьего порядка), и универсальное правило разложения по строке или столбцу. В статье (Спиридонов, 2024) красной нитью проводится мысль о том, что математическое понятие вероятности раскрывается только в его частотной интерпретации, а потому свойства вероятностей, формулы для подсчёта условной и безусловной вероятностей события мотивируются предварительными рассуждениями на языке частот, что делает понятными соотношения, принимаемые за аксиомы и определения в теории вероятностей.

Линейные функции и линейные преобразования

В школьном курсе математики рассматриваются только функции в области вещественных чисел. Поэтому при изложении курса линейной алгебры, с которого начинается первый семестр, нужно опираться только на уже знакомые студентам-первокурсникам понятия, в частности, на вещественнозначные функции одного вещественного аргумента.

Функция $y = f(x)$ называется *линейным оператором* (или *линейным преобразованием*), если при любых вещественных числах x' , x'' , λ , x справедливы соотношения

$$f(x' + x'') = f(x') + f(x''), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Таким образом, линейные преобразования – это функции, сохраняющие линейные операции над аргументами; точнее: это функции, которые линейные операции над аргументами переводят в те же линейные операции над их образами.

Здесь сразу возникают вопросы:

1. Какими формулами должны задаваться функции, чтобы они были линейными операторами?
2. Как выглядят простейшие линейные операторы?

Для первоначальной пробы возьмём простейшую функцию – линейную, $y = kx + b$. Проверим оба условия из определения линейного оператора. Имеем:

$$\begin{aligned} y(x' + x'') &= k(x' + x'') + b = kx' + kx'' + b, \\ y(x') + y(x'') &= kx' + b + kx'' + b = kx' + kx'' + 2b; \\ y(\lambda x) &= k(\lambda x) + b, \quad \lambda y(x) = \lambda(kx + b) = \lambda kx + \lambda b. \end{aligned}$$

Следовательно, линейная функция $y = kx + b$ будет линейным преобразованием тогда и только тогда, когда $b = 2b$ и $b = \lambda b$, что возможно лишь при $b = 0$. Другими словами, линейная функция входит в класс линейных операторов лишь тогда, когда она представляет собой прямую пропорциональную зависимость $y = kx$ (случай $k \neq 0$) или является тождественным нулём $y \equiv 0$ (случай $k = 0$).

Другие элементарные функции пробовать на предмет линейности даже не имеет смысла. Так, например, корень или логарифм от суммы чисел вообще не преобразуется (нет формул для $\sqrt[n]{x' + x''}$ и $\log_a(x' + x'')$), а квадратичная, показательная и тригонометрическая функции явно свойством линейности не обладают:

$$(x' + x'')^2 = (x')^2 + 2x'x'' + (x'')^2; \quad a^{x'+x''} = a^{x'} \cdot a^{x''}; \\ \cos(x' + x'') = \cos x' \cdot \cos x'' - \sin x' \cdot \sin x''.$$

Таким образом, в формулах линейных преобразований должны быть слагаемые в виде произведения числа на переменную, то есть слагаемые вида kx при любых k . Давайте проверим это утверждение для вещественнозначной функции двух переменных, построив её в соответствии со сформулированным правилом (а тогда всё легко обобщится и на случай нескольких переменных). Возьмём, к примеру, функцию $y = 2x_1 + 9x_2 \equiv L_2(x)$, которая определена при всех x_1, x_2 . Иначе говорят, что функция $L_2(x)$ определена на множестве всех упорядоченных пар вещественных чисел $x \equiv (x_1; x_2)$, которое называется двумерным арифметическим пространством и обозначается $\mathbb{R}^2$, со значениями в множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$. В математике это записывают в виде $L_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ или, если нужно уточнить обозначения переменных, в виде $L_2: \mathbb{R}_{(x_1; x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_y$. Операции сложения и умножения на числа в арифметическом пространстве определяют «покомпонентно»:

$$x = (x_1; x_2), \quad x' = (x'_1; x'_2), \quad x'' = (x''_1; x''_2), \quad x' + x'' = (x'_1 + x''_1; x'_2 + x''_2), \quad \lambda x = (\lambda x_1; \lambda x_2).$$

Убедимся в том, что функция $L_2(x)$ действительно является линейным оператором из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$:

$$L_2(x' + x'') = 2(x'_1 + x''_1) + 9(x'_2 + x''_2) = L_2(x') + L_2(x'') = 2x'_1 + 9x'_2 + 2x''_1 + 9x''_2; \\ L_2(\lambda x) = 2(\lambda x_1) + 9(\lambda x_2) = \lambda L_2(x) = \lambda(2x_1 + 9x_2).$$

Теперь становится понятным следующее утверждение относительно числовой линейной функции нескольких переменных $y = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$: она является линейным преобразованием тогда и только тогда, когда отсутствует постоянное слагаемое, то есть когда $c_0 = 0$. Итак, функция $y = L_n(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ задаёт линейное преобразование из $\mathbb{R}_{(x_1; \dots; x_n)}^n$ в $\mathbb{R}_y^1$.

Все приведённые выше рассуждения носят крайне важный характер в образовательном процессе: они призваны развить понятийный аппарат учащихся, раскрыть содержательную сторону вновь вводимых определений и позволяют общее абстрактное описание линейного оператора наполнить конкретным содержанием (посредством явного предъявления простой расчётной формулы в результате несложных размышлений). Кроме того, эту часть занятия нужно проводить, выполняя все выкладки на аудиторной доске и тем самым подталкивая учащихся к необходимости конспектировать. Последнее подключает мелкую моторику рук к визуальному и слуховому каналам восприятия информации, что делает усвоение знаний более прочным и долговременным.

Итак, вид формул, которые обеспечивают для функции выполнение условий линейного преобразования, установлен: это однородные многочлены первой степени с несколькими переменными $L_n(x)$. Поэтому теперь можно на одной таблице (выведя её на экран в аудитории) показать несколько примеров линейных преобразований, действующих в различных арифметических пространствах (таблица 1). По содержанию информация в таблице 1 крайне проста, понятна и легко воспринимается слушателями, однако она довольно громоздка и требует определённого времени (так ценного на уроке) для переписывания обучающимися в конспект. В подобных ситуациях вполне оправдано использование заранее заготовленных презентаций (слайд-шоу) с учебным материалом. В приведённых примерах все линейные преобразования представляют собой векторнозначные

(а не вещественнозначные, как это было ранее) функции, но такое (в общем-то, скромное) усложнение не вызывает у обучающихся вопросов и встречает полное понимание.

Таблица 1.

Примеры линейных операторов (линейных преобразований)

линейное преобразование	матрица линейного преобразования
$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 + 7x_2 - 6x_3, \\ y_2 = 5x_1 - 9x_2 + 3x_3 \end{cases}$ $f: \mathbb{R}_{(x_1; x_2; x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{(y_1; y_2)}^2$	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 5 & -9 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$
$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4x_1 + 3x_2, \\ y_2 = -x_1 + 8x_2 \end{cases}$ $f: \mathbb{R}_{(x_1; x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(y_1; y_2)}^2$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$
$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -6x_1 - 20x_2, \\ y_2 = -12x_1 + x_2, \\ y_3 = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$ $f: \mathbb{R}_{(x_1; x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(y_1; y_2; y_3)}^3$	$\begin{pmatrix} -6 & -20 \\ -12 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

Из таблицы 1 видно, что линейное преобразование однозначно определяется своей матрицей: по матрице оператора легко выписываются формулы, связывающие независимые переменные из пространства $\mathbb{R}_x^n$ и зависимые переменные из пространства $\mathbb{R}_y^m$ (числа m и n равны, соответственно, количеству строк и количеству столбцов в матрице преобразования).

Кстати, любая система линейных уравнений допускает интерпретацию в терминах линейных преобразований. Так, решая, к примеру, систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -1, \end{cases}$$

то есть находя все её решения, мы фактически находим все принадлежащие $\mathbb{R}_{(x_1; x_2; x_3)}^3$ прообразы элемента $(4; -1) \in \mathbb{R}_{(y_1; y_2)}^2$ при линейном преобразовании, которое определяется матрицей системы (первая функция в таблице 1; ищется $f^{-1}(4; -1)$).

Линейные операции над линейными преобразованиями

К линейным операциям над элементами некоторого множества относятся их сложение и умножение на число (или, более общо, умножение на элементы произвольного поля).

Над числовыми функциями $y = u(x)$ и $y = v(x)$, имеющими общую область определения, определяются все четыре арифметические операции по следующим правилам:

$$(u \pm v)(x) = u(x) \pm v(x); \quad (u \cdot v)(x) = u(x) \cdot v(x); \quad \left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad v(x) \neq 0.$$

Умножение функции на число вытекает из формулы для произведения функций при условии, что одна из них является тождественной константой. Все перечисленные операции над функциями многократно осуществлялись в курсе элементарной математики и, безусловно, знакомы каждому школьнику. Из этих соотношений следует, что для нахождения суммы, произведения или частного двух функций нужно при каждом значении аргумента x вычислить значения $u(x)$, $v(x)$ обеих функций, а затем полученные значения функций сложить/вычесть, перемножить, поделить.

В качестве примера на таблице 2 проиллюстрировано выполнение линейных операций над конкретными функциями $u(x) = x^3$ и $v(x) = 5^x$, а именно, показаны процедуры сложения выбранных функций и умножение первой из них на число 9 (взятого

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

исключительно для примера). В нижней строке таблицы 2 эти же операции проведены при $x = 4$, чтобы были воочию видны все производимые при этом числовые расчёты и их последовательность.

Таблица 2.

Линейные операции над функциями одной переменной

$y = u(x)$	$y = v(x)$	$u(x) + v(x)$	$9 \cdot u(x)$
$y = x^3$	$y = 5^x$	$x^3 + 5^x$	$9 \cdot x^3$
$u(4) = 4^3$	$v(4) = 5^4$	$4^3 + 5^4$	$9 \cdot 4^3$

Совершенно аналогично вводят линейные операции и над линейными преобразованиями: сначала по произвольному числовому набору $x_1, x_2, \dots$ независимых переменных вычисляют значения $y_1, y_2, \dots$ зависимых переменных, а затем полученные значения зависимых переменных складывают между собой («покомпонентно») или каждое умножают на число. Примеры представлены на таблице 3. Помещённая на таблице 3 информация хорошо и быстро усваивается учащимися (при минимальных комментариях преподавателя) и поэтому вся может быть выведена на экран в аудитории (что сэкономит значительное количество учебного времени).

Таблица 3.

Линейные операции над линейными преобразованиями

Сложение линейных преобразований	
$y = f_1(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 6x_1 + 5x_2, \\ y_2 = 3x_1 + 2x_2, \\ y_3 = 7x_1 - 4x_2 \end{cases}$	$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$
$y = f_2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -9x_1 - 27x_2, \\ y_2 = -8x_1 + 39x_2, \\ y_3 = 42x_1 + 15x_2 \end{cases}$	$A_2 = \begin{pmatrix} -9 & -27 \\ -8 & 39 \\ 42 & 15 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$
$y = f_1(x) + f_2(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = (6 - 9)x_1 + (5 - 27)x_2, \\ y_2 = (3 - 8)x_1 + (2 + 39)x_2, \\ y_3 = (7 + 42)x_1 + (-4 + 15)x_2 \end{cases}$	$A_1 + A_2 =$ $= \begin{pmatrix} 6 - 9 & 5 - 27 \\ 3 - 8 & 2 + 39 \\ 7 + 42 & -4 + 15 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$
Умножение линейного преобразования на число	
$y = 9 \cdot f_1(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 9 \cdot 6x_1 + 9 \cdot 5x_2, \\ y_2 = 9 \cdot 3x_1 + 9 \cdot 2x_2, \\ y_3 = 9 \cdot 7x_1 - 9 \cdot 4x_2 \end{cases}$	$9 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 9 \cdot 6 & 9 \cdot 5 \\ 9 \cdot 3 & 9 \cdot 2 \\ 9 \cdot 7 & 9 \cdot (-4) \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

Показанные на таблице 3 расчёты демонстрируют то, что в результате линейных операций над линейными преобразованиями вновь получаются линейные преобразования, или, как говорят математики, множество линейных операторов, действующих в фиксированных арифметических пространствах (из $\mathbb{R}_x^n$ в $\mathbb{R}_y^m$ при фиксированных m и n), является замкнутым относительно линейных операций.

Матрицы линейных преобразований, полученных в результате линейных операций, формируются из матриц исходных преобразований довольно простыми действиями по типу самих операций: при сложении линейных преобразований элементы матриц-слагаемых, расположенные на одинаковых местах, складываются, а при умножении оператора на число каждый элемент его матрицы умножается на это число. В полном соответствии с

описанными правилами и вводятся линейные операции над матрицами (таблицами чисел) – сложение матриц (одного размера) и умножение любой матрицы на число.

Примеры линейных операций над матрицами.

$$1. \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 5 & 9 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$2. 5 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -7 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 10 & 8 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 3 & -21 \\ -27 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 7 & 29 \\ 23 & 12 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Композиция линейных преобразований и умножение матриц

Умножение линейных преобразований, действующих в одних и тех же арифметических пространствах, вполне можно было бы ввести в соответствии с общим правилом умножения функций: так же, как и при сложении преобразований, задав значения аргументов, находим значения $y_1, y_2, \dots$ зависимых переменных, а затем их перемножаем «покомпонентно». Вот как выглядит произведение линейных преобразований $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из таблицы 3, если следовать этому алгоритму:

$$\begin{cases} y_1 = (6x_1 + 5x_2) \cdot (-9x_1 - 27x_2) = -54x_1^2 - 207x_1x_2 - 135x_2^2, \\ y_2 = (3x_1 + 2x_2) \cdot (-8x_1 + 39x_2) = -24x_1^2 + 101x_1x_2 + 78x_2^2, \\ y_3 = (7x_1 - 4x_2) \cdot (42x_1 + 15x_2) = 294x_1^2 - 63x_1x_2 - 60x_2^2 \end{cases}$$

В результате получена векторнозначная функция нескольких переменных, отображающая $\mathbb{R}_{(x_1, x_2)}^2$ в $\mathbb{R}_{(y_1, y_2, y_3)}^3$. Но она не является линейным преобразованием: здесь связь между независимыми и зависимыми переменными осуществляется посредством однородных многочленов второй (а не первой) степени. Такого сорта функции служат предметом изучения теории функций нескольких переменных, векторного (и шире – математического) анализа и т. д., но не линейной алгебры.

Оказывается, образованная из линейных преобразований сложная функция (иначе: композиция функций) будет также линейным преобразованием. Вот эту-то матрицу композиции линейных преобразований и называют произведением (или, реже, хотя и более правильно, композицией) матриц исходных преобразований. Покажем на примере, как из матриц-сомножителей формируется матрица-произведение.

Понятие сложной функции входит в программу школьного курса элементарной математики и потому хорошо знакомо обучающимся. Напомним: если имеются две функции $y = F(x)$ и $z = G(y)$ и значения первой входят в область определения второй, то из них можно составить сложную функцию (композицию функций) по правилу $z = G(F(x)) \equiv (G \circ F)(x)$. Последняя функция будет каждому значению независимой переменной x ставить в соответствие значение зависимой переменной z . Графическая иллюстрация композиции функций приведена на рис. 1.

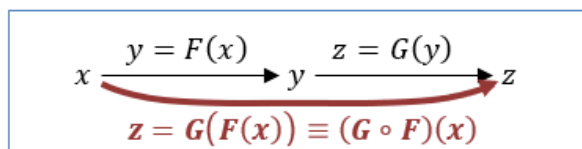


Рис. 1. Композиция функций

Пример построения композиции (последовательного применения) двух линейных преобразований приведён на таблице 4. Обратите внимание: все числа в матрицах исходных преобразований различны и положительны. Это сделано намеренно, чтобы легче можно

было отследить траекторию каждого элемента в совершаемых преобразованиях и его место в итоговой матрице.

Таблица 4.

Пример композиции линейных преобразований

Линейные преобразования и их матрицы	
F $(x_1; x_2; x_3) \rightarrow (y_1; y_2)$ $\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3, \\ y_2 = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 \end{cases}$ $A \equiv \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$	G $(y_1; y_2) \rightarrow (z_1; z_2)$ $\begin{cases} z_1 = 8y_1 + 10y_2, \\ z_2 = y_1 + 2y_2 \end{cases}$ $B \equiv \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$
Композиция линейных преобразований	
$G \circ F: (x_1; x_2; x_3) \rightarrow (z_1; z_2)$ $\begin{cases} z_1 = 8(5x_1 + 7x_2 + 3x_3) + 10(4x_1 + 6x_2 + 9x_3) \\ z_2 = 1(5x_1 + 7x_2 + 3x_3) + 2(4x_1 + 6x_2 + 9x_3) \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = (8 \cdot 5 + 10 \cdot 4)x_1 + (8 \cdot 7 + 10 \cdot 6)x_2 + (8 \cdot 3 + 10 \cdot 9)x_3, \\ z_2 = (1 \cdot 5 + 2 \cdot 4)x_1 + (1 \cdot 7 + 2 \cdot 6)x_2 + (1 \cdot 3 + 2 \cdot 9)x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 80x_1 + 116x_2 + 114x_3, \\ z_2 = 13x_1 + 19x_2 + 21x_3 \end{cases}$	

Пример на таблице 4 показывает, что сформированная из линейных преобразований $F: \mathbb{R}^3_{(x_1; x_2; x_3)} \rightarrow \mathbb{R}^2_{(y_1; y_2)}$ и $G: \mathbb{R}^2_{(y_1; y_2)} \rightarrow \mathbb{R}^2_{(z_1; z_2)}$ композиция $G \circ F: \mathbb{R}^3_{(x_1; x_2; x_3)} \rightarrow \mathbb{R}^2_{(z_1; z_2)}$ также является линейным преобразованием. Анализ проделанных выкладок приводит к выводу о том, что отмеченный факт будет иметь место для композиции любых линейных преобразований, из которых композиция вообще может быть образована.

Матрицу композиции линейных преобразований называют произведением матриц исходных преобразований, да и саму композицию линейных операторов практически всегда называют (по понятным теперь причинам) их умножением. Порядок матриц-сомножителей в их произведении в точности повторяет функциональную запись композиции: формуле $G \circ F$ отвечает произведение $B \cdot A$, где B – матрица оператора G , A – матрица оператора F . С учётом сказанного, для примера из таблицы 4 имеем:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 5 + 10 \cdot 4 & 8 \cdot 7 + 10 \cdot 6 & 8 \cdot 3 + 10 \cdot 9 \\ 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 9 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

Последняя формула показывает принцип умножения матрицы на матрицу: строки первой матрицы умножаются на столбцы второй так, как если бы они представляли собой координаты векторов в ортонормированном базисе и вычислялось бы их скалярное произведение, то есть при умножении строки на столбец перемножаются между собой их первые, вторые и т.д. элементы и полученные попарные произведения складываются; результаты перемножения строк на столбцы записываются в те строки и столбцы результирующей матрицы, номера которых совпадают с номерами перемножаемых строки и столбца. В выписанной выше формуле участвующие в умножении матриц строки и столбцы выделены различными цветами, что лучше подчёркивает выполняемые при умножении матриц действия над их элементами.

Описанное выше правило умножения матрицы на матрицу является общепринятым в математике. Оно, как мы видели, естественным образом появляется при построении композиции линейных преобразований, хотя на первый взгляд может показаться несколько

искусственным. Разумеется, перемножить можно не любые матрицы, как и композицию можно составить не из любых линейных преобразований (и вообще не из любых функций): умножение матрицы на матрицу осуществимо только в том случае, когда количество элементов в строке первой матрицы (то есть количество её столбцов) совпадает с количеством элементов в столбце второй (то есть с количеством её строк).

С помощью операции умножения матриц можно любое линейное преобразование записать в виде одного матричного равенства, равносильного применяемой везде выше покоординатной форме (типа системы линейных уравнений). В таблице 5 показано как это сделать на примере линейных преобразований из таблицы 1. Обратите внимание: сохраняя матрицу линейного преобразования в прежней (и, надо сказать, совершенно естественной) форме, независимые переменные (аргументы) уже **вынужденно** приходится записывать в виде вектора-столбца, чтобы было выполнимо соответствующее умножение, а тогда значения зависимых переменных «автоматически» получаются записанными матрицей-столбцом. Кстати, именно поэтому во все матричные соотношения линейной алгебры координаты векторов входят как векторы-столбцы.

Таблица 5.

Представление линейных преобразований в матричной форме

$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 + 7x_2 - 6x_3, \\ y_2 = 5x_1 - 9x_2 + 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 5 & -9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	
$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4x_1 + 3x_2, \\ y_2 = -x_1 + 8x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	
$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -6x_1 - 20x_2, \\ y_2 = -12x_1 + x_2, \\ y_3 = 5x_1 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -20 \\ -12 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	

Композиция линейных преобразований также легко формируется на языке матриц. Это показано на таблице 6, которая составлена на основе таблицы 4. При этом соответствующие формулы смотрятся не только не громоздкими, а даже, наоборот, приобретают довольно компактный и по-своему привлекательный вид.

Таблица 6.

Составление композиции линейных преобразований в матричной форме

$F: (x_1; x_2; x_3) \rightarrow (y_1; y_2)$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$G: (y_1; y_2) \rightarrow (z_1; z_2)$ $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
Композиция линейных преобразований	
$G \circ F: (x_1; x_2; x_3) \rightarrow (z_1; z_2)$ $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 116 & 114 \\ 13 & 19 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	

Если использовать буквенные обозначения не только для матриц, но и для переменных, то все связанные с линейными преобразованиями формулы станут более компактными и во многих случаях более удобными при математических манипуляциях.

Действительно, обозначим буквами X и Y векторы-столбцы из независимых и зависимых переменных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Тогда любое линейное преобразование допускает представление в виде матричного равенства $Y = A \cdot X$, внешне похожего на функцию прямой пропорциональной зависимости (здесь A – матрица линейного оператора). Произвольная система линейных уравнений эквивалентна матричному уравнению $A \cdot X = B$, в котором B – матрица-столбец правых частей (свободных членов). Композиция линейных преобразований также составляется легко и буквально в одну строчку (для конкретики можно иметь в виду пример из таблиц 4 и 6):

$$Y = AX, \quad Z = BY \Rightarrow Z = B(AX) = (BA)X.$$

Дополнительные методические замечания по рассматриваемой тематике

1. Свойства операций над матрицами. Линейные операции над матрицами и операция умножения матриц удовлетворяют тем же свойствам, что и операции над числами, но с одним исключением: для умножения матриц не выполняется переместительный (= коммутативный) закон:

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

для матриц

Таким образом, оперируя с матрицами, нельзя произведение AB механически заменять на произведение BA . Это, собственно, и неудивительно: матрицы при перемножении используются «несимметрично» — у первой берутся строки, а у второй столбцы. При этом для отдельных матриц результат умножения может не меняться при их перестановке. Такие матрицы называются перестановочными (или коммутирующими). Вот нетривиальный пример.

Пример. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$ ■

В остальном, как уже отмечено, операция умножения матриц подчиняется всем привычным по работе с числами законам, например:

$$(AB)C = A(BC), \quad A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)D = BD + CD,$$

где размеры матриц A, B, C, D предполагаются таковыми, что все указанные операции выполнимы.

2. Обратная матрица. Необходимость введения понятия обратной матрицы можно объяснить двояко.

С одной стороны, желательно, чтобы над матрицами были определены все четыре арифметические операции, то есть наряду со сложением, вычитанием, умножением, ещё и деление. Если провести аналогию с числами, то деление на число равносильно умножению на ему обратное. Взаимно обратные числа определяются из соотношения $ab = 1$. И первым делом нужно понять, есть ли такая матрица (назовём её единичной), которая будет играть в умножении матриц ту же роль, что и единица в умножении чисел. Другими словами, при умножении единичной матрицы на другую в результате должна остаться эта другая матрица неизменной (так как для чисел $1 \cdot a = a$). Конечно, единичную матрицу можно пытаться подобрать непосредственно (и это несложно), но, по мнению автора, проще и с методической точки зрения лучше оттолкнуться от линейных преобразований (что, кстати, отвечает и тренду статьи).

Единичный оператор – это линейное преобразование (обозначим его через E), которое отображает аргумент в самого себя, оставляя его без изменений: $E(x) = x$, $x \in \mathbb{R}_x^n$. Матрица единичного оператора выписывается моментально (для простоты взято $n = 2$):

$$\begin{cases} y_1 = x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2, \\ y_2 = x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, единичная матрица (её принято обозначать через E или I) – это квадратная матрица произвольного порядка, на главной диагонали которой расположены 1 (единицы), а остальные элементы равны 0 (нулю). И действительно, не составляет труда убедиться в том, что $EC_1 = C_1$, $C_2E = C_2$ при любых (не обязательно квадратных) матрицах C_1 и C_2 , для которых указанные произведения выполнимы. Теперь понятно, что взаимно обратные матрицы должны удовлетворять условию $AB = E$.

С другой стороны, возможность записать любую систему линейных уравнений в виде матричного уравнения $AX = B$, внешне похожего на простейшее числовое линейное уравнение $ax = b$, наводит на мысль об общности методов их решений. Линейное уравнение решается делением обеих его частей на множитель a или, что то же самое, умножением обеих его частей на число a^{-1} , обратное к $a \neq 0$. Если эту идею переносить на матричное уравнение, то необходимо изучить вопрос о существовании такой матрицы A^{-1} (обратная матрица), для которой $A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица (аналог числа 1), то есть такая, что $EX = X$.

Интересно и полезно обсудить с учащимися вопрос о том, почему понятие обратной матрицы вводится только в случае, когда исходная матрица A является квадратной. Используемое при решении систем линейных уравнений равенство $A^{-1}A = E$ при размере $m \times n$ матрицы A требует от матрицы A^{-1} размера $n \times m$, так как единичная матрица должна быть квадратной. Но если для не квадратной матрицы A существовала бы обратная матрица A^{-1} , то система линейных уравнений $AX = B$ имела бы единственное решение $X = A^{-1}B$. Однако это противоречило бы фактам о разрешимости систем: например, система линейных уравнений с количеством уравнений, меньшим количества неизвестных, может иметь (и большей частью имеет) бесконечное множество решений.

3. Степени матрицы. Операция умножения матриц позволяет рассматривать степени матрицы с целыми показателями, определяя их по аналогии с числами. Так, квадрат матрицы – это умножение матрицы на саму себя: $A^2 = A \cdot A$. Отсюда сразу следует, что матрица A должна быть квадратной. Чтобы возвести матрицу в натуральную степень n , нужно её последовательно умножить саму на себя n раз. Если матрица имеет обратную (то есть невырожденная), то можно ввести степень матрицы с отрицательным целым показателем: $A^{-n} = (A^{-1})^n$. Полагают $A^0 = E$. Для степеней матрицы с целыми показателями справедливы привычные свойства степеней: $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$; $(A^m)^n = A^{m \cdot n}$.

Рассматривают также многочлены от матрицы.

Пример. Пусть даны матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и многочлен $P(x) = 5x^2 - x + 7$. Тогда значением многочлена $P(x)$ от матрицы A называется матрица

$$P(A) = 5A^2 - A + 7E = 5 \begin{pmatrix} 13 & -6 \\ 18 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & -29 \\ 87 & 10 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

4. Матричная интерпретация комплексных чисел. Комплексные числа $z = x + iy$ интерпретируют, как правило, геометрическими объектами – точками $(x; y)$ или радиус-векторами $\overrightarrow{OM} = (x; y)$ на координатной плоскости Oxy . Наряду с этим множество комплексных чисел допускает матричную интерпретацию, а именно, каждому комплексному числу $z = x + iy$ может быть сопоставлена матрица второго порядка вида

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что множество указанных матриц замкнуто относительно линейных операций, операции умножения матрицы на матрицу и операции перехода к обратной матрице (операции деления), при этом операция их умножения обладает свойством коммутативности:

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + x_2y_1) \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & -(-y) \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

Единицей относительно умножения служит обычная единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а решением матричного уравнения $X^2 = -E$ является матрица $I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, служащая, понятное дело, аналогом мнимой единицы i .

Таким образом, множество матриц указанного специального вида можно рассматривать как одну из моделей комплексных чисел. Представлению любой такой матрицы в виде

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = xE + yI$$

отвечает привычная запись комплексного числа в алгебраической форме

$$z = (x; y) = x(1; 0) + y(0; 1) = x \cdot 1 + y \cdot i.$$

Заключение

Предлагаемые в данной статье таблицы рекомендуется использовать в учебном процессе – как на лекционных, так и на практических занятиях. Учебный материал на таблицах расположен компактно, каждая из них полностью может быть выведена на экран в аудитории, то есть обучаемые сразу видят весь учебный материал по изучаемому разделу курса. Как отмечалось ранее, информация на таблицах крайне проста и легко усваивается обучающимися, однако она громоздка и требует значительного времени при конспектировании. Но поскольку учебный материал на таблицах изложен довольно подробно, то для его понимания достаточно ограничиться лишь визуальным восприятием без времязатратного конспектирования учащимися. Подобное использование заранее заготовленных учебных таблиц (презентаций) следует признать целесообразным.

Однако в целом в учебном процессе такое использование заранее заготовленных слайдов должно быть крайне ограниченным и оправданным и никак не заменять и, уж тем более, не вытеснять рукописной работы учащихся по конспектированию учебного материала. Поэтому для закрепления полученных с помощью таблиц теоретических сведений обязательно нужно сразу же решить несколько задач, причём традиционным способом – поэтапной рукописной записью на учебной доске, призванной мотивировать работу учащихся по ведению своих конспектов, что, в свою очередь, приведёт к активизации мелкой моторики рук.

По современным научным данным (Бернштейн Н.А., 1990, глава восьмая), (Маркувина И.В., 2021 и библиография там), (Пятая газета, 2024, с. 2), мелкая моторика рук в наибольшей степени стимулирует развитие различных отделов головного мозга, причём начиная фактически с самого рождения. При этом именно занятие письмом (а не, к примеру, вязание, вышивание или лепка) способствует максимальному вовлечению в работу нейронов и нейронных связей на стыке различных областей мозга. Поэтому Учителю нужно стремиться к тому, чтобы конспектирование велось учащимися на протяжении всего занятия. Двигательные движения кистей рук наряду с визуальным и слуховым каналами приёма

информации обучающимися будут приводить к работе различных участков головного мозга и, как следствие, к прочному и надёжному усвоению знаний.

Список литературы

- Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. СПб: Лань, 2015.
- Бернштейн Н.А. Физиология движений и активность. М.: Наука, 1990.
- Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Под ред. В.А. Садовниченко. М.: Дрофа, 2004.
- Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2001.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. 6-е изд., стер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб: Лань, 2021.
- Маркувина И.В. Мелкая моторика как средство развития речи // Наука и реальность (Science&Reality): сетевой журн. 2021. № 2(6). С. 71–72. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/melkaya-motorika-kak-sredstvo-razvitiya-rechi> (дата обращения: 26.01.2026).
- Постников М.М. Аналитическая геометрия. Лекции по геометрии. Ч. I. 3-е изд., испр. СПб: Лань, 2009.
- Постников М.М. Линейная алгебра. Лекции по геометрии. Ч. II. 3-е изд., испр. СПб: Лань, 2009.
- Пятая газета / учредитель А.Л. Меллер. Свид-во ПИ № ФС77-62381. М., 2015. 8 полос. Еже-нед. 2024, 17 дек. № 51 (400).
- Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том III, часть 1. СПб: БХВ-Петербург, 2010.
- Спиридонов М.Я. О введении понятия определителя при преподавании математики // Наука, техника, педагогика высшей школы. Новые технологии. Материалы Всерос. науч.-практ. конф. «Наука – Общество – Технологии – 2022» (Россия, Москва, 1–4 марта 2022 г.). М.: Московский политехнический университет, 2022. С. 363–371.
- Спиридонов М.Я. О преподавании начал линейной алгебры: операторы и матрицы // Инновации в образовательном процессе. Сборник трудов XXIII Международной научно-практической конференции, посвящённой 70-летию основания института, Году защитника Отечества, 80-летию Победы в Великой Отечественной войне, в рамках Десятилетия науки и технологий (Россия, Чебоксары, 24.04.2025). Чебоксары: Чебоксарский институт (филиал) Московского Политеха, 2025. С. 24–29.
- Спиридонов М.Я. Отражение связи частоты и вероятности события в практике преподавания // Математика в школе. 2024. № 7. С. 36–48. DOI: 10.47639/0130-9358_2024_7_36

Информация об авторе

Спиридонов Михаил Яковлевич; кандидат физико-математических наук; доцент; доцент кафедры «Математика»; ФГАОУ ВО «Московский политехнический университет» (Российская Федерация, 107023, г. Москва, ул. Большая Семеновская, д. 38); E-mail: spir.polytech@mail.ru; ORCID: 0000-0003-1895-4737

SOME METHODOICAL NOTES ON THE TOPIC “OPERATIONS ON MATRIXES”

Spiridonov M. Ya.

Moscow Polytechnic University

Ph.D (Mathematics), Associate Professor

Abstract. It is proposed to present the initial information about linear operators and matrices in their unity, in their inseparable connection. Moreover, it is better to give all formulas in numerical (and not alphabetic) format, which in no way limits or diminishes the generality of the reasoning, but makes them (both formulas and reasoning) understandable for the majority of students. Standard operations on linear transformations as on functions generate corresponding operations on matrices, which demonstrates the naturalness of their (operations) origin and, as a consequence, makes them generally accepted. In particular, the well-known rule of matrix multiplication, which at first glance seems artificial, arises when constructing a composition of linear operators. This is one of a series of articles by the author, which demonstrate the implementation of one of the fundamental principles of learning – each newly introduced concept, definition, counting rule, etc. must be reasonably motivated in advance, so as not to seem to the student to have come from nowhere.

Keywords: linear transformation, matrix of a linear operator, operations on linear transformations, operations on matrices and the origin of the rules for their execution.

For citation: Spiridonov M. Ya. (2026). Some Methodical Notes on the Topic “Operations on Matrixes”. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2 (42), 105–119. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-105-119

Copyright: © M. Ya. Spiridonov (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Beklemishev, D. V. (2015). *Kurs analiticheskoy geometrii i lineynoy algebry: Uchebnik*. Sankt-Peterburg: Lan'. (In Russ.)
- Bernshteyn, N. A. (1990). *Fiziologiya dvizheniy i aktivnost'*. Moscow: Nauka. (In Russ.)
- Bugrov, Ya. S., Nikol'skiy, S. M. (2004). *Vysshaya matematika. Elementy lineynoy algebry i analiticheskoy geometrii / Pod red. V.A. Sadovnichego*. Moscow: Drofa. (In Russ.)
- Il'in, V. A., Poznyak E. G. (2005). *Lineynaya algebra*. Moscow: FIZMATLIT. (In Russ.)
- Kostrikin, A. I. (2004). *Vvedeniye v algebru. Chast' I. Osnovy algebry: Uchebnik dlya vuzov*. Moscow: FIZMATLIT. (In Russ.)
- Kurosh, A. G. (2021). *Kurs vysshey algebry*. Sankt-Peterburg: Lan'. (In Russ.)
- Markuvinas, I. V. (2021). Melkaya motorika kak sredstvo razvitiya rechi. *Nauka i real'nost' (Science&Reality): setevoy zhurn*, 2(6), 71–72. Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/melkaya-motorika-kak-sredstvo-razvitiya-rechi> (In Russ.)
- Postnikov, M. M. (2009). *Analiticheskaya geometriya. Lektsii po geometrii. Chast' I*. Sankt-Peterburg: Lan'. (In Russ.)
- Postnikov, M. M. (2009). *Lineynaya algebra. Lektsii po geometrii. Chast' II*. Sankt-Peterburg: Lan'. (In Russ.)
- Pyataya Gazeta. (2024) / *Uchreditel' A.L. Meller. Svid-vo PI № FS77-62381*. Moscow. 17 dek. 51 (400). (In Russ.)

- Smirnov, V. I. (2010). *Kurs vysshey matematiki. Tom III, chast' 1*. Sankt-Peterburg: BKHV-Peterburg. (In Russ.)
- Spiridonov, M. Ya. (2025). О преподавании начал линейной алгебры: операторы и матрицы [On teaching the beginnings of linear algebra: operators and matrices]. *Innovatsii v obrazovatel'nom protsesse. Sbornik trudov XXIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyashchyonnoy 70-letiyu osnovaniya instituta, Godu zashchitnika Otechestva, 80-letiyu Pobedy v Velikoy Otechestvennoy voyne, v ramkakh Desyatiletiya nauki i tekhnologiy* (pp. 24–29). Cheboksary: Cheboksarskiy institut (filial) Moskovskogo Politekha. (In Russ., abstract in Eng.)
- Spiridonov, M. Ya. (2022). О введении понятия определителя при преподавании математики [On the introduction of the concept of a determinant in teaching mathematics]. *Nauka, tekhnika, pedagogika vysshey shkoly. Novyye tekhnologii. Materialy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Nauka – Obshchestvo – Tekhnologii – 2022»* (pp. 363–371). Moscow: Moskovskiy politekhnicheskiy universitet. (In Russ., abstract in Eng.)
- Spiridonov, M. Ya. (2024). Reflection of the relationship between frequency and probability of an event in teaching practice. *Mathematics at school*, 7, 36–48. DOI: 10.47639/0130-9358_2024_7_36 (In Russ., abstract in Eng.)
- Vinberg, E. B. (2001). *Kurs algebry*. Moscow: Faktorial Press. (In Russ.)

Information about the author

Mikhail Ya. Spiridonov; Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor; Associate Professor of the Department of Mathematics; Moscow Polytechnic University (Bolshaya Semyonovskaya st., 38, Moscow, 107023, Russian Federation); E-mail: spir.polytech@mail.ru; ORCID: 0000-0003-1895-4737

Статья поступила в редакцию	06.02.2026
Принята к публикации	15.03.2026
Статья опубликована	19.06.2026