

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

CONTINUUM
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.
ОБРАЗОВАНИЕ

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина» (399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28, 1)

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Регистрационный номер средства массовой информации ПИ № ФС77-69418 от 14 апреля 2017 г.).

Журнал входит в Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

- Щербатых С.В.** – **главный редактор**, доктор педагогических наук, профессор, ректор Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина, профессор кафедры математики, информатики, физики и методики обучения (Елец, Россия);
- Дворяткина С.Н.** – **заместитель главного редактора**, доктор педагогических наук, доцент, проректор по научной и инновационной деятельности Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина, профессор кафедры математики, информатики, физики и методики обучения (Елец, Россия);
- Абылкасымова А.Е.** – доктор педагогических наук, профессор, академик НАН РК, академик РАО, директор Центра развития педагогического образования, заведующий кафедрой методики преподавания математики, физики и информатики Казахского национального педагогического университета им. Абая (Алматы, Казахстан);
- Артюхина М.С.** – доктор педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики, физики и информатики Арзамасского филиала ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (Арзамас, Россия);
- Боровских А.В.** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры образовательных технологий, профессор кафедры дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия);
- Гриншкун В.В.** – доктор педагогических наук, профессор, академик РАО, профессор департамента информатизации образования Института цифрового образования Московского городского педагогического университета (Москва, Россия);
- Заславская О.Ю.** – доктор педагогических наук, профессор, профессор департамента информатизации образования Института цифрового образования Московского городского педагогического университета (Москва, Россия);
- Игнатушина И.В.** – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, декан физико-математического факультета Оренбургского государственного педагогического университета (Оренбург, Россия);
- Карапетян В.С.** – доктор психологических наук, профессор, профессор кафедры психологии развития и педагогической психологии Армянского государственного педагогического университета им. Х. Абовяна (Ереван, Армения);

- Каракозов С.Д.** – доктор педагогических наук, профессор, директор Института математики и информатики, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики Московского педагогического государственного университета (Москва, Россия);
- Орлов В.В.** – доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры методики обучения математике и информатике Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена (Санкт-Петербург, Россия);
- Разинкина Е.М.** – доктор педагогических наук, профессор, помощник генерального директора ФГБУ «Национальный медицинский исследовательский центр имени В.А. Алмазова» Минздрава России (Санкт-Петербург, Россия);
- Райхельгауз Л.Б.** – доктор педагогических наук, профессор кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике физико-математического факультета Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д. Ушинского (Ярославль, Россия);
- Рыжова Н.И.** – доктор педагогических наук, профессор Государственного университета просвещения, Академии реализации государственной политики и профессионального развития работников образования Министерства просвещения Российской Федерации (Москва, Россия);
- Сергеева Т.Ф.** – доктор педагогических наук, профессор, профессор Дирекции образовательных программ Московского городского педагогического университета (Москва, Россия);
- Смирнов Е.И.** – доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, теории и методики обучения математике Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д. Ушинского (Ярославль, Россия);
- Тарасова О.В.** – доктор педагогических наук, профессор, директор института педагогики и психологии Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева (Орёл, Россия);
- Шабанова М.В.** – доктор педагогических наук, профессор, заместитель начальника отдела методического обеспечения процедур оценки качества общего образования ГАОУ ДПО города Москвы «Московский центр качества образования» (Москва, Россия);
- Мельников Р.А.** – ответственный секретарь, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики, информатики, физики и методики обучения Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина (Елец, Россия).

THE FOUNDER AND THE PUBLISHER

The founder and the publisher: Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Bunin Yelets State University» (399770, Lipetsk region, Yelets, st. Kommunarov, 28, 1).

The journal is registered in the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media. (Registration number: PI № FS 77-69418 of 14 april 2017).

The journal is included in The List of Russian peer-reviewed scientific journals, in which main scientific results of doctoral and candidate's theses must be published.

THE EDITORIAL BOARD

- Shcherbatykh S. V.** **Editor-in-chief**, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Rector, Professor of the Department of Mathematics, Computer Science, Physics and Teaching Methods, Bunin Yelets State University (Yelets, Russia);
- Dvoryatkina S. N.** **Deputy Editor-in-Chief**, Doctor of Pedagogy, Associate Professor, Vice-Rector for Research and Innovation, Professor of the Department of Mathematics, Computer Science, Physics and Teaching Methods, Bunin Yelets State University (Yelets, Russia);
- Abylkasymova A. E.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Academician of the RAO, Director of the Center for the Development of Pedagogical Education, Head of the Department of Methods of Teaching Mathematics, Physics and Computer Science of the Abai Kazakh National Pedagogical University (Almaty, Kazakhstan);
- Artyukhina M. S.** Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics, Physics, and Computer Science at the Arzamas Branch of the National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Arzamas, Russia);
- Borovskikh A. V.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Educational Technologies, Professor of the Department of Differential Equations of the Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia);
- Grinshkun V. V.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Professor of the Department of Education Informatization, Institute of Digital Education, Moscow City Pedagogical University (Moscow, Russia);
- Zaslavskaya O. Yu.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Education Informatization, Institute of Digital Education, Moscow City Pedagogical University (Moscow, Russia);
- Ignatushina I. V.** Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Physics and Mathematics, Orenburg State Pedagogical University (Orenburg, Russia);
- Karapetyan V. S.** Doctor of Psychology, Professor, Professor of the Department of Developmental and Educational Psychology of Armenian State Pedagogical University Kh. Abovyan (Yerevan, Armenia);

- Karakozov S. D.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Computer Science, Professor of the Department of Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics of Moscow Pedagogical State University (Moscow, Russia);
- Orlov V. V.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Methods of Teaching Mathematics and Computer Science of the A.I. Herzen Russian State Pedagogical University (St. Petersburg, Russia);
- Razinkina E. M.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Assistant General Director of the Almazov National Medical Research Centre (St. Petersburg, Russia);
- Raichelgauz L. B.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Theory and Methods of Teaching Mathematics of Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky (Yaroslavl, Russia);
- Ryzhova N. I.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professorat at the State University of Education, Academy of State Policy Implementation and Professional Development of Education Workers of the Ministry of Education of the Russian Federation (Moscow, Russia);
- Sergeeva T. F.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Directorate of Educational Programs of the Moscow City Pedagogical University (Moscow, Russia);
- Smirnov E. I.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis, Theory and Methods of Teaching Mathematics of Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky (Yaroslavl, Russia);
- Tarasova O. V.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Director of the Institute of Pedagogy and Psychology, Oryol State University named after I.S. Turgenev (Oryol, Russia);
- Shabanova M. V.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Deputy Head of the Department of Methodological Support for General Education Quality Assessment Procedures at the Moscow Center for Education Quality (Moscow, Russia);
- Melnikov R. A.** Executive Secretary, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics, Computer Science, Physics and Teaching Methods, Bunin Yelets State University (Yelets, Russia).

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

- Власова-Галасеева Н. М., Статкевич И. А., Романовская М. А.** ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ОПЫТ И ТЕНДЕНЦИИ ПОДГОТОВКИ ПОДРОСТКОВ К РОБОТОТЕХНИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ..... 8
- Лувсандорж Ц., Тувшинзая Ю.** МОДЕЛЬ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ИНТЕРВАЛОВ ДИДАКТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И ОСНОВАННАЯ НА НЕЙ МЕТОДИКА 21
- Чернышов В. П.** КРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НА МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ ЭФФЕКТИВНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ..... 36

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

- Богун В. В.** ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ В ОБЛАСТИ АНАЛИЗА ОДНОМЕРНЫХ ДАННЫХ С ПРИМЕНЕНИЕМ РЕДАКТОРА ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ MICROSOFT EXС..... 45
- Лаптева Т. Д.** ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ИНТЕНСИВ КАК ФОРМА ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ К КОНСТРУИРОВАНИЮ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ..... 72
- Смирнов Е. И., Дворяткина С. Н., Тихомиров С. А.** КРЕАТИВНОСТЬ ЛИЧНОСТИ КАК МОДУС ВЫРАЖЕННОСТИ ЭПИСТЕМОЛОГИИ ФУНДИРОВАНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ 92
- Спиридонов М. Я.** НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕМЕ «ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ» 105

МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

- Воробьев Г. А., Фомина Т. П.** ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ В ОБРАЗОВАНИИ: НОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКИ..... 120
- Смолянинова О. Г., Ануфриенко Е. К.** ОБУЧЕНИЕ ПОДРОСТКОВ РАЗРАБОТКЕ ПРИЛОЖЕНИЙ С ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ ИНТЕРНЕТ ВЕЩЕЙ 134
- Тиняков С. В., Щербатых Л. Н.** ВНЕДРЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС С ЦЕЛЬЮ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЦЕННОСТНЫХ ОРИЕНТАЦИЙ КУРСАНТОВ..... 146
- Щербатых С. В., Шемонаева И. И.** МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ В ПОДГОТОВКЕ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ ПРЕДМЕТОВ К ПРИМЕНЕНИЮ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ 160

CONTENTS

METHODOLOGICAL ASPECTS OF TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE IN THE GENERAL EDUCATION SYSTEM

- Vlasova-Galaseeva N. M., Statkevitsch I. A., Romanovskaya M. A.** PEDAGOGICAL EXPERIENCE AND TRENDS IN PREPARING TEENAGERS FOR ROBOTICS OLYMPIADS8
- Luvсандорж Ts., Tuvshinzaya Yu.** CONCENTRIC INTERVAL MODEL OF DIDACTIC SOLUTIONS AND A METHODOLOGY BASED ON IT 21
- Chernyshov V. P.** CRITERION TASKS FOR THE EXCLUSION METHOD AS A MEANS OF IMPLEMENTING EFFECTIVE FEEDBACK IN PREPARATION FOR FINAL CERTIFICATION IN MATHEMATICS 36

THEORIES, MODELS AND TECHNOLOGIES OF TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE IN THE SYSTEM OF VOCATIONAL EDUCATION

- Bogun V. V.** FORMATION OF PROFESSIONAL COMPETENCIES OF UNIVERSITY STUDENTS IN THE FIELD OF ONE-DIMENSIONAL DATA ANALYSIS USING THE MICROSOFT EXCEL SPREADSHEET EDITOR 45
- Lapteva T. D.** EDUCATIONAL INTENSIVE AS A FORM OF TRAINING FUTURE TEACHERS IN CONSTRUCTING DIAGNOSTIC TASKS ON FUNCTIONAL MATHEMATICAL LITERACY..... 72
- Smirnov E. I., Dvoryatkina S. N., Tikhomirov S. A.** PERSONAL CREATIVITY AS A MODE OF EXPRESSION OF THE EPISTEMOLOGY OF THE FOUNDATION OF FRACTAL COMPLEXITY 92
- Spiridonov M. Ya.** SOME METHODOLOGICAL NOTES ON THE TOPIC “OPERATIONS ON MATRIXES” 105

METHODOLOGY AND TECHNOLOGY OF VOCATIONAL EDUCATION IN THE ERA OF DIGITAL TRANSFORMATION

- Vorobyov G. A., Fomina T. P.** ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN EDUCATION: NEW TOOLS FOR TEACHERS OF PROBABILITY AND STATISTICS..... 120
- Smolyaninova O. G., Anufrienko E. K.** TEACHING TEENAGERS TO DEVELOP AUGMENTED REALITY APPLICATIONS USING INTERNET OF THINGS TECHNOLOGY 134
- Tinakov S. V., Shcherbatykh L. N.** THE IMPLEMENTATION OF THE VIRTUAL REALITY TECHNOLOGIES INTO THE EDUCATIONAL PROCESS FOR DEVELOPING PROFESSIONAL VALUE ORIENTATIONS OF CADETS 146
- Shcherbatykh S. V., Shemonaeva I. I.** METHODOLOGICAL APPROACHES IN PREPARING FUTURE NATURAL SCIENCE TEACHERS TO USE ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN THE EDUCATIONAL PROCESS..... 160

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-8-20

УДК
371.384.4

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ОПЫТ И ТЕНДЕНЦИИ ПОДГОТОВКИ ПОДРОСТКОВ К РОБОТОТЕХНИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

Власова-Галасеева Наталия Михайловна
старший преподаватель
Статкевич Ирина Алексеевна
д. филос. н., профессор
Романовская Мария Александровна
начальник отдела по работе с
талантливыми абитуриентами

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

АНО ВО «Университет Иннополис»

Российская академия народного хозяйства и государственной службы

Аннотация. В статье представлен опыт Университета Иннополис (Республика Татарстан) и муниципальной организации дополнительного образования детского центра «Восхождение» (Ярославская область, г. Ярославль) сопровождения и подготовки участников олимпиад по робототехнике высокого уровня, учитывающая статистику и профили. Исследуются особенности и подходы, используемые обеими организациями, а также анализируются их достижения с учетом статистических данных и профилей участников. В статье рассматриваются как личностные практики каждого учреждения, так и общие точки соприкосновения, позволяющие создать единое поле для анализа и обмена опытом. Уделяется внимание тому, как каждая из организаций развивает у участников навыки, необходимые для успешного участия в соревнованиях, включая технические, креативные и командные качества. Кроме того, приводятся статистические данные по актуальным направлениям в области инженерной, профессиональной и соревновательной робототехники, что позволяет выявить текущие тенденции и уровень подготовки участников.

Ключевые слова: робототехнические соревнования, олимпиады, специализированные учебные смены, всероссийские и международные соревнования, профильные смены, профессиональное сопровождение, довузовское образование

Для цитирования: Власова-Галасеева Н.М., Статкевич И.А., Романовская М.А. Педагогический опыт и тенденции подготовки подростков к робототехническим олимпиадам // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 2 (42). С. 8–20. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-8-20

Права: © Н.М. Власова-Галасеева, И.А. Статкевич, М.А. Романовская (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Робототехника – привычный и, одновременно, стремительно развивающийся социокультурный феномен в сегменте высоких технологий и научно-образовательной парадигме, поскольку «технологические изменения» меняют характер возможностей. (Смирнов 2023, 528). Мировые высокотехнологические корпорации вкладывают огромные средства в индустрию, вкладываясь в искусственный интеллект, программное обеспечение, механистические разработки. Интерес к робототехническим специальностям в высших учебных заведениях среди молодежи усиливается. Ежегодные данные по количеству поданных заявлений на эти специальности стабильно растут. Одним из самых результативных способов поступить в топовые вузы страны и зарубежья на робототехнические, инженерные и ИТ специальности является победа в высокоуровневых олимпиадах. Повышенный интерес вузов инженерного профиля, а типовых в особенности, уделяет значительное внимание программам дополнительного образования, оснащая собственные центры по работе с одаренной молодежью всем необходимым и, постоянно улучшая программы дополнительного образования, которые важны «с точки зрения поиска мотивированных и талантливых учащихся для привлечения их в качестве абитуриентов» (Косарецкий, 2019, 30). В свете сказанного, подчеркнем, что университет Иннополис уже много лет является одной из базовых площадок для организации и проведения таких высокоуровневых соревнований по робототехнике, как Innpolis Open Robotics, Приволжский научно-технический конкурс работ школьников РОСТ-ISEF, Международная олимпиада по робототехнике для школьников и студентов World Robot Olympiad Association, Фестиваль RuCode (совместно с МФТИ), Региональный этап ВсОШ по технологии – информационная безопасность и робототехника (совместно с Республиканским олимпиадным центром), Турниры и олимпиады по робототехнике – РРО, МОШ, ОЦПМ и др. В свою очередь центры дополнительного образования активно работают на повышение уровня своих обучающихся и повышение квалификации педагогов. Детский центр "Восхождение" принимает участие в большинстве робототехнических мероприятий своего региона, обучающиеся постоянно выезжают на олимпиады, конкурсы, экскурсии и другие регионы, а также на олимпиады Всероссийского и международного уровня. Особенно значимы эти события для подросткового возраста, когда необходимо не только выдавать актуальные знания, но и поддерживать мотивацию. Обучающиеся центра выступают на олимпиадах на довольно высоком уровне, складывая себе в копилку очередные дипломы, ведь на момент поступления в университет они обязательно пригодятся. Основные проблемы, связанные с подготовкой победителей и призеров высокоуровневых соревнований все еще связываются с колоссальными материальными затратами на оборудование, оснащение, привлечением квалифицированных статусных методистов и тренеров для работы с одаренными детьми и подобного рода трудностями, то в данной статье предпринята попытка продемонстрировать каким образом решаются эти задачи, стоящие перед школьниками, родителями и наставниками, которые на протяжении многих лет практикуются на базе описанных образовательных организаций.

Обзор литературы

Популяризацию науки в современном обществе сегодня стоит рассматривать как масштабное явление, осуществляемое при поддержке ведущих мировых корпораций, связанных с высокими технологиями и их именитыми представителями, такими как И. Маск, Н.Д. Тайсон, С. Возняк, И. Бенджио, Е. Касперский и др. Серьезные исследования в областях цифровой трансформации образования и дополнительного образования школьников на базе профильных инженерных топовых вузов проведены коллективом НИУ ВШЭ, среди которых: А.Ю. Уваров, Э. Гейбл, И.В. Дворецкая, С.Г. Косарецкий, М.Е. Гошин, А.А. Беликов, И.А. Коршунов, О.С. Гапонова, В.М. Пешкова, которых мы процитировали в данной статье. Ярославская область, как и Республика Татарстан не стала исключением в глобальном процессе адаптации социума к цифровой и роботизированной среде, в которой высокотехнологические процессы не только необратимы, но еще и определяющие.

Цель исследования: проанализировать комплекс организационно-педагогических мероприятий и методологию процесса подготовки победителей высокоуровневых олимпиад

по робототехническим направлениям на примере педагогического опыта образовательных организаций.

Опыт университета Иннополис

Среди подготовительных методик и подходов, апробированных на высокоуровневых робототехнических соревнованиях и внедренных в образовательный процесс сектора довузовской подготовки и олимпиадного отдела организации образовательной деятельности университета Иннополис наиболее удачно зарекомендовали себя такие, как: личностный, деятельный, полисубъективный, системный; методы сбора, оценивания, интерпретации и прогнозирования получаемых данных *ad hoc*, *in momento* и др. Система подготовки в Университете Иннополис выстроена таким образом, что, на смотря на факт того, что олимпиадное направление подготовки исходит как раз из так называемого «натаскивания» и многократной воспроизводимости задач и специфических ситуаций, многократно подтвердивших собственную жизнеспособность, однако мы уделяет огромное значение анализу и последующей трансляции, что называется, от первого лица, индивидуальным, личностным «находкам», способам преодоления сложных или даже незнакомых ситуаций. Во многом это стало возможным поскольку УТС (учебно-тренировочные сборы) проходят на базе университета в режиме 24/7 в течение двух-трех недель, когда ребята заезжают на базу и, кроме активного общения с тренерами и экспертами, постоянно общаются друг с другом взаимно обогащаясь уникальной информацией. Многолетнее общение такого плана привело к тому, что члены сборной Республики Татарстан на сегодняшний день не только являются победителями и призерами высокоуровневых всероссийских и международных соревнований, но и студентами и выпускниками престижных специализированных международных вузов.

Членство в сборной Республики Татарстан начинается с момента распознавания одаренности учащегося, которую он демонстрирует с момента участия в соревнованиях младшей возрастной группы, хотя многие приходят в олимпиадное движение в подростковом возрасте, демонстрируя осознанное стремление в первую очередь, к достижению результатов, которые затем могут быть монетизированы или оформлены статусом победителя престижных соревнований, а, с недавнего времени еще и обладателями спортивных разрядов (как, например, мастер спорта по программированию и т.п.). Специалисты Отдела довузовского образования активно сотрудничают с профессионалами профильных лабораторий, которые выступают тренерами, экспертами и спикерами в процессе выявления и подготовки обучающихся, участвующих в олимпиадном движении. Являясь одной из всероссийских базовых площадок подготовки олимпиадников, университет Иннополис проводит такие профильные смены, как Школы олимпиадной подготовки по робототехнике; подготовка к международной олимпиаде *Innopolis Open* по робототехническим профилям; подготовка к региональному этапу Всероссийской олимпиады школьников по технологии – информационная безопасность и робототехника (совместно с Республиканским олимпиадным центром); круглогодичные онлайн занятия по робототехнике для учащихся среднего и старшего школьного звена, где осуществляется подготовка к конкретным статусным мероприятиям, соревнованиям и конкурсам, на которых осуществляется отбор талантливой молодежи в кандидаты членства в сборную Республики Татарстан и дальнейшая, значительно более интенсивная подготовка их в более высоком статусе.

Множество мероприятий, проводимых на базе Университета Иннополис или других площадках, где вуз активно участвует, создаются коллаборации из учителей специализированных школ, тренеров по робототехническим направлениям, представителей таких образовательных учреждений, как Кванториумы, ЦМИТы (центры молодёжного инновационного творчества), центров робототехники, секций и кружков на базе СОШ и региональных центров и т.д., которые, выявляя одаренную молодежь, способствуют ее продвижению, транслируя информацию о соответствующих достижениях. Методисты университета, активно продвигают и собственные, хорошо зарекомендовавшие себя в образовательном процессе и актуальные сегодня МУКи (массовые открытые онлайн курсы), которые являются «отдельным законченным учебным мероприятием» (Уваров, 2019, 106) вокруг которых может быть по-

строена часть глобальной образовательной программы. Система дополнительного образования в Республике Татарстан выстроена таким образом, что каждый район обладает минимум одной секцией или кружком по робототехнике, оснащенным специальными конструкторами (LEGO, Trik, Tetrix и др.), позволяющим обучающимся осваивать и совершенствовать техники взаимодействия подростков с роботами. Каждый ребенок, демонстрирующий устойчивую динамику побед на начальных этапах робототехнических соревнований, и, что особенно важно, заинтересованность в данной деятельности, получает своего куратора, целью которого является продвижение подопечных на все более высокоуровневые и престижные соревнования. Ребята, показывающие устойчивые результаты, будучи победителями и призерами высокотехнологичных соревнований приглашаются в расширенный состав сборной Республики Татарстан, где на полном обеспечении повышают собственную квалификацию, развивают *hard skills*, *soft skills*, необходимые не только для личностного роста, но и для работы в команде, поскольку командные соревнования составляют сегодня значительную часть международных высокоуровневых соревнований. Как и в любом другом виде спорта сборная Республики должна постоянно обновляться; эти процессы связаны как с возрастными категориями, так и с достаточно жесткими условиями конкуренции, при которых учащимся регулярно приходится доказывать и подтверждать свое право быть членом сборной. Специалисты довузовского образования университета Иннополис используют объемные профессиональные методики, адаптированные под особенность нашей площадки, уделяя большое значение тем аспектам, которые, казалось бы, являются избыточными, но на практике, значительно улучшают качество и сам процесс подготовки обучающихся. Например, большое значение в наших занятиях отводится экспериментальной части подготовки, когда в мельчайших деталях моделируются и воспроизводятся условия высокоуровневых соревнований с акцентом на преодоление проблемных зон и обстоятельств, с которыми ранее сталкивались претенденты на высшие награды. Многократная воспроизводимость критических ситуаций повышает уровень стрессоустойчивости, что может рассматриваться как один из определяющих факторов на пути к победе; формирует навык быстрого реагирования на апории; раскрывает и развивает сильные стороны каждого члена команды, а, значит, и степень полезности; высвечивает слабые места и т. п. Среди тезисов концепции М. Полани есть очень важное замечание, многократно подтвержденное в практике «принятия решений», где он аргументирует, что «искомое решение» должно быть не в том, что стоило бы применять на практике решение «совершенное» или «популярное», такое, «чтобы позволило большинству учеников добиться значительных успехов и способствовало достижению долгосрочных целей, связанных с равенством и превосходным качеством образования» (Полани, 2023, 83).

Огромное значение в процессе подготовки олимпиадников в отделе довузовского образования методистами университета уделяется теоретической (концептуальной) составляющей, жесткому мониторингу самых новейших достижений в области робототехники, сформулированных эмпирических и теоретических данных, которые могут быть использованы в педагогической и тренерской деятельности; серьезное значение уделяется методике интерпретации и оцениванию получаемых данных; неоценимую помощь оказывают праксиметрические методики и различные дидактические разработки. Сборная Республики Татарстан осуществляет собственную деятельность в четкой координации со Сборной России, членами научно-методического совета соревнований. Учебно-тренировочные сборы проходят под непосредственным кураторством ведущих тренеров, экспертов, судей и преподавательского состава членов ассоциаций и профессиональных объединений инженеров робототехнического направления. Данные сборы – это интенсив, цель которого заключается, кроме повышения квалификации претендентов на медали, но в формировании и последующем влиянии на индивидуально-личностный рейтинг как отдельного члена, так и команды по целому ряду критериев, которым необходимо соответствовать уже на отборочном этапе. Как правило, учебно-тренировочные сборы проходят на базе университета в течение восьми – десяти дней в мае перед всероссийской робототехнической олимпиадой; учащиеся, прошедшие результативный отбор, далее в летний период (как правило, в июне) стартует следующий этап подго-

товки к международным соревнованиям, который также осуществляется в среде экспертов высокого уровня на базе университета Иннополис. На подобные сборы приглашается тренерский состав из Москвы, Нижнего Новгорода, Казани, Санкт-Петербурга, Ростова-на-Дону и др. Важным фактором таких встреч служит такая особенность, когда ребята на протяжении многих лет осуществляя взаимодействие друг с другом и тренерами сближаются настолько, что не только достигают внушительных успехов, но и расширяют экспертную базу, получая статус тренеров, судей международного уровня. В таком процессе каждое последующее поколение получает максимально справедливые и всесторонние рекомендации и поддержку своих предшественников. Таким образом повышается и сам статус соревнований, которые, апробируясь в каждом конкретном случае (олимпиады, конкурсного проекта и т. д.) закрепляется в той или иной части как референтные точки, от которых стоит отталкиваться и, преодолевая которые соревнования выходят на более высокие, более сложные, а, соответственно, и более престижные уровни. По сути, здесь напрашивается аналогия со спортивными олимпийскими играми, смысл которых в том, чтобы продемонстрировать все возможности человеческого организма и преодолеть зафиксированные ранее рекорды. Индивидуальный подход (личная карточка с данными, рейтинг) в подобных условиях наиболее важен, поскольку позволяет свести к минимуму часть рисков, с которым сталкиваются команды, сформированные с определенной долей спонтанности, даже если в них состоят самые топовые олимпиадники. Важной составляющей учебно-тренировочных сборов на базе университета Иннополис является её финальная часть, где с середины лета финалисты и полуфиналисты региональных этапов высокоуровневых олимпиад получают возможность тренироваться вместе с призерами и победителями – действующими члена сборных Татарстана и России. Совместные тренировки (в том числе и онлайн) с ведущими спортсменами, а также топовыми тренерами не только стимулируют мотивацию «новичков» и «продолжающих», но и позволяют определить собственные сильные и слабые стороны для того, чтобы занять надлежащее место в команде. Эта практика получила многолетнее подтверждение собственной состоятельности и жизнеспособности. Она наглядным образом демонстрирует не только власть тренера, которая в спортивном мире признана непререкаемой, но определенного рода рефлексии самих участников, через критический взгляд на себя и собственные возможности. Многоуровневый характер подобных мероприятий заключается и в том, что победители и призеры привлекаются как составители задач/заданий для нижних ступеней, где им предоставляется возможность продемонстрировать собственные знания, который к тому же достаточно хорошо оплачиваются центром довузовской подготовки и привлечения абитуриентов университета Иннополис. Таким образом мы видим и ряд дополнительных стимуляций олимпиадной активности среди школьников Республики Татарстан. Многолетние командные тренировки с элементами ротации на базе университета предоставляют максимально объективные возможности оценивания как текущего уровня соискателей на членство в сборной, так и перспективных сторон их развития, раскрытия потенциала, стрессоустойчивости, мобильности и т.д. Учебно-тренировочные сборы (проходящие в августе) представляют собой финишную прямую, где тренируются и, одновременно, соревнуются призеры и победители высокоуровневых робототехнических соревнований с расширенным составом сборной команды Республики Татарстан, осуществляя подготовку к региональному, а затем и всероссийскому этапам робототехнических фестивалей «Робофест», «Инженерные кадры России»; международному робототехническому фестивалю «Робофинист»; World Robot Olympiad и др.

Круглогодичная подготовка олимпиадных команд в формате учебно-тренировочных сборов на базе Университета Иннополис с привлечением ведущих тренеров сборных Российской Федерации позволяет вовремя реагировать, усваивая самые передовые эмпирии и технологии робототехнической соревновательной среды; расширение методического плана, в том числе мы отдаем приоритет экспериментальным методикам, часто уникальным авторским с круглосуточным мониторингом в режиме постоянного контроля с одновременной интерпретацией и корректировкой наших действий, позволяющим не только совершенствовать

процесс подготовки олимпиадников в области олимпиадной робототехники, но и создавать для них наиболее комфортные условия для реализации совместных действий на пути достижения самых высоких результатов. Так, подразделения и лаборатории университета Иннополис располагают закрытыми, открытыми, водными полигонами, а также территориальными площадками для реализации практически любых актуальных запросов членов сборной Республики, их руководителей, тренеров и наставников. Высоко оценивая роль руководства Республики, согласимся, что «не законы, приказы и регламенты, а мотивация и интерес детей, энергетика и талант педагогов определяют жизнеспособность системы дополнительного образования и реализацию её миссии» (Косарецкий, 2019, 24) и с тем, что «создать мотивацию, которой хватило бы на такой долгий срок, – это большая и сложная задача» (Ягодкин, 2022, 37) и, подытоживая оценку результативности собственной работы, выбора способов и методов воздействия на подростковую аудиторию, мы можем констатировать факт того, что за «молодой вуз», имеет множество преимуществ в подготовке молодого поколения, поскольку, как бы это не казалось кому-то необъективным, но и футуристическое здание университета, уникальная архитектура целого города, молодые преподаватели, являющиеся студентами и, одновременно победителями и призерами множества робототехнических, инженерных, ИТ-соревнований, об успехах которых еще недавно можно было прочесть в интернете, а сегодня общаться с ними «на равных», возможность почувствовать себя частью компании, частью системы, которая всячески продвигает тебя, созвучны подросткам на столько, что их можно рассматривать не только как весьма удачную мотивацию, но и планы на дальнейшую жизнь. Таких примеров достаточно в любом топ-вузе, в том числе и в университете Иннополис, о котором мечтают с детства, о чём свидетельствуют мотивационные письма, в которых абитуриенты указывают уже конкретные фамилии тех профессоров, у которых они бы хотели обучаться не только в аудиториях, но и продолжать в лабораториях.

Жизнеспособность выстраиваемой отделом довузовского образования в коллаборации с лабораториями и профессорско-преподавательским составом Университета Иннополис модели дополнительного образования, включающего в себя мероприятия по отбору претендентов на членство в региональных и всероссийских сборных команд по робототехнике, требующие принципиально иного подхода в сравнении с дополнительным образованием всех желающих, связанного со значительным количеством рисков в соответствии с требованиями повышенной квалификации тренерского состава, подтверждается следующими данными: уже на этапах наблюдения и подготовки к таким соревнованиям, как школы олимпиадной подготовки (RoboWinter, Robolymp Autumn, весенняя ШОП по робототехнике) в период 2019 г. было подготовлено 77 участников; также в этом году организован и проведён Робототехнический хакатон для старших классов по основам робототехники и программирования контроллеров Arduino-2019 – собрал 43 участника; Заключительный этап олимпиады НТИ по профилю «Интеллектуальные робототехнические системы» – отборочный этап: 4393 участника, заключительный этап: 26 участников; Всероссийская робототехническая олимпиада, совместно с которой проходила олимпиада Innopolis Open Robotics, охватила – 197 команды, 537 участников; WRO Friendship в Денмарке – делегация была представлена 44 участниками (12 команд); Федеральные учебно-тренировочные сборы к World Robot Olympiad – 88 участников; World Robot Olympiad (Венгрия) – Сборная РФ составила 98 человек (из которых 42 участника) – в общей сложности было завоевано 6 медалей. Во всех перечисленных мероприятиях Университет Иннополис выступил организатором и базовой площадкой – 13 раз (1 раз в качестве владельца олимпиады); осуществлял обеспечения методическими и аппаратными средствами – 3 раза; привлек тренерского и преподавательского состава – 57 чел.; сопровождающих лиц и вожатых – 294 чел.; в организованных мероприятиях приняло участие – более 840 чел., команд – 215. В 2020 г. Университет Иннополис выступил организатором и базовой площадкой – 7 раз (1 раз в качестве владельца олимпиады); осуществлял обеспечения методическими и аппаратными средствами – 2 раза; привлек тренерского и преподавательского состава – 57 чел.; в организованных мероприятиях приняло участие – более 218 чел.; в 2021 г. Университет Иннополис выступил организатором и базовой площадкой – 9 раз

(1 раз в качестве владельца олимпиады); осуществлял обеспечения методическими и аппаратными средствами – 3 раза; привлек тренерского и преподавательского состава – 8 чел.; в организованных мероприятиях принял участие – более 500 чел.; в 2022 г. Университет Иннополис выступил организатором и базовой площадкой – 3 раза (1 раз в качестве владельца олимпиады); осуществлял обеспечения методическими и аппаратными средствами – 2 раза; в организованных мероприятиях принял участие – более 118 чел.; в 2023 г. Университет Иннополис выступил организатором и базовой площадкой – 9 раз (1 раз в качестве владельца олимпиады); осуществлял обеспечения методическими и аппаратными средствами – 6 раз; привлек тренерского и преподавательского состава – более 30 чел.; в организованных мероприятиях принял участие – более 250 чел. и 101 команда; к осени 2024 г. Университет Иннополис выступил организатором и базовой площадкой – 6 раз; осуществлял обеспечения методическими и аппаратными средствами – 2 раза; привлек тренерского и преподавательского состава – более 20 чел.; в организованных мероприятиях принял участие – более 530 чел. и 84 команды.

Подводя итог сказанному, подчеркнём жизнеспособность выстроенной нами обучающей модели и ее высокую результативность. В период с 2019–2024 годы команды из Республики Татарстан на World Robot Olympiad завоевали 2 золотые, 2 серебряные, 1 бронзовую медали, 2 команды вошли в ТОП-8 категории Football. В заключительном этапе олимпиады НТИ по профилю "Интеллектуальные робототехнические системы" в этот же период было подготовлено 20 призеров и 9 победителей; Финал олимпиады Innopolis Open Robotics по профилям («Интеллектуальные автономные необитаемые подводные аппараты»; «Манипуляционные ИРС» и «Мобильные ИРС» и др.) принес победу – 22 участникам и 37 призерам. Заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по предмету «Технология», профиль «Робототехника» - 2024 подготовил 5 победителей и 28 призеров.

Опыт детского центра «Восхождение»

Начать стоит с того, что занятия робототехникой являются практико-ориентированными, теоретические сведения сразу же подкрепляются апробацией на практике. Занятия в таком формате делают процесс обучения более интересным и увлекательным, что способствует повышению мотивации учащихся. Кроме того, работа с современными технологиями и инструментами помогает учащимся быть готовыми к изменениям в технологической среде, которая в настоящее время постоянно меняется. В рамках обучения происходит интеграция математических, информационных и естественно-научных знаний, робототехника объединяет эти науки. Школьники находят применение на практике тех знаний, которые они получают на уроках в школе, а также значительно расширяют эти знания. Например, если школьник программирует работу манипуляционной робототехнической системы, то он нуждается в таких знаниях, как координатная система, такая тема изучается в школе на уроках математики. А если необходимо построение пути для дальнейшего движения по нему, то здесь понадобится теория графов, которую необходимо изучить дополнительно уже на занятиях по робототехнике.

В работе со школьниками используются такие методы, как: проектный, конструкторский, интерактивное обучение, использование мультимедийных средств, исследовательская деятельность. Проектный метод подразумевает создание собственных роботов или автоматизированных систем для решения конкретных задач. Школьники учатся определять проблему, ставить цель, задачи, проводить анализ о существующих решениях проблемы, проектировать, программировать собственную модель, а также тестировать её, находить и исправлять ошибки. Использование конструкторов, таких как LEGO Mindstorms и его аналоги, микроконтроллеры типа Arduino и ESP и их комплектующие, 3D печать, позволяют ученикам на практике изучать основы механики и электроники. Для программирования (в зависимости от возраста) используются такие среды, как EV3 Classroom, Clever (Small Basic), PyCharm (Python), Arduino IDE. К достижению выпускного класса обучающийся умеет ориентироваться в языках программирования и быстро перестраиваться на необходимый язык, у обучающегося отсутствует страх перед незнакомой средой программирования. Школьники

умеют ставить эксперименты, получать результаты. Кроме конструкторов в рамках занятия активно используются виртуальные симуляторы (Trick Studio, Wokwi), это позволяет обучающимся, не имеющим личного специализированного оборудования работать дома. Кроме того, некоторые темы, например, "движение по лабиринту", "поиск пути" удобнее изучать в рамках стимулятора. Важно в обучении - поощрение исследовательской активности, где учащиеся могут выбирать темы для самостоятельного изучения, самостоятельно исследовать новые технологии и применять их в работе (например, над проектом).

Кроме текущих еженедельных занятий школьники посещают тематические экскурсии, например, экскурсия в офис Яндекс, общаются с экспертами. Один из обучающихся нуждался в более узконаправленной консультации по 3D моделированию, с ним провёл консультацию специалист с производства. Важную роль в процессе обучения играют поездки на соревнования. Соревнования – эта практика, приближенная к реальности, ведь здесь участники сталкиваются с реальными задачами, которые требуют применения математических и физических концепций, а также знаний по программированию и механике. Участие в соревнованиях стимулирует креативное мышление и инновации, участники должны находить оригинальные решения для сложных задач и уметь конкурировать. Соревновательные моменты часто ставят участников перед непредвиденными проблемами, что способствует развитию навыков критического мышления и способности к быстрому решению задач. Например, Российская робототехническая олимпиада подразумевает дополнительное задание, которое может полностью менять концепцию решения, подготовленную участником. Национальная технологическая олимпиада подразумевает закрытое задание, ребятам необходимо самостоятельно подготовить робототехническое решение, опираясь на свои знания и умение быстро находить и анализировать информацию.

Стоит отметить, что особая атмосфера соревнований способствует повышению мотивации участников. Соревнования по робототехнике являются важным компонентом образовательного процесса, способствуя развитию не только технических, но и социальных навыков. Командная работа помогает участникам развивать навыки коммуникации, координации и распределения задач. Занятия робототехникой и соревнования по ней способствуют развитию командной работы и развитию мягких навыков через несколько ключевых аспектов. Эффективная коммуникация – ключевой аспект работы в команде. Участники учатся выражать свои мысли и идеи, а также активно слушать мнения других. Участие в командах для разработки и управления роботами требует от членов группы четкой координации действий, распределения ролей и ответственности. Команды должны учиться слушать друг друга, обсуждать идеи и принимать совместные решения. Во время работы над проектом могут возникать разногласия или конфликты. Участники учатся находить компромиссы, обсуждать проблемы и искать решения, что способствует росту навыков межличностного общения и эмоционального интеллекта. Чтобы успешно завершить проект (например, к дате соревнований), командам необходимо планировать работу, устанавливать приоритеты и эффективно распределять время между задачами. Это развивает навыки тайм-менеджмента и организации. Работая вместе, команды могут генерировать новые идеи и решения. Это позволяет участникам развивать креативное мышление и способность к инновациям. Командная работа требует взаимной поддержки. Участники учатся мотивировать друг друга, что создает позитивную атмосферу и укрепляет связи внутри группы. Участие в соревнованиях предоставляет возможность получать и предоставлять обратную связь, что является важным аспектом личного и профессионального роста. Испытывая успехи и провалы вместе, команды учатся принимать на себя ответственность и извлекать уроки из опыта, что способствует развитию устойчивости и адаптивности.

Результаты обучающихся постоянно улучшаются. Детский центр "Восхождение" постоянно принимает участие в региональных, межрегиональных, всероссийских и международных соревнованиях по робототехнике. В 2023-2024 учебном году обучающиеся детского центра стали призёрами Всероссийской олимпиады Робофест (два вторых места и одно третье), участников финала было шесть обучающихся, призёрами Национальной технологической олимпиады направления «цифровые сенсорные системы» (трое), заняли второе место в

практическом этапе олимпиады Innopolis Open по робототехнике (трое), второе место во Всероссийских соревнованиях по робототехнике RoboEmercom. Обучающиеся постоянные участники региональных и межрегиональных соревнований, в 80% становятся победителями и призёрами.

Сотрудничество университета и детского центра

Партнёрство с Университетом Иннополис для детского центра – это огромные возможности, дополнительная детям возможность получать качественное ИТ-образование и транслировать педагогическому сообществу передовой методологический опыт для выявления и развития одарённых школьников. Университет предлагает программы и курсы по современным технологиям, что помогает детям развивать навыки в таких областях, как программирование, робототехника и дизайн. Сотрудничество даёт возможность детям учиться у опытных специалистов и получать менторскую поддержку. На данный момент специалисты Университета оказывают поддержку детских проектов, готовят подробные рецензии, дают необходимые консультации, что очень важно для успешной подготовки и защиты проектной работы.

Международная олимпиада Innopolis Open поддерживает мотивацию обучающихся, расширяет горизонты, заставляет мыслить и находить уникальные решения. Дистанционный этап олимпиады организован так, что в течение некоторого времени постепенно выкладываются задачи, которые необходимо решить. Всего дистанционных этапов два. Возможность приехать на финал получают те, кто успешнее других решил задачи. Финал – это отличная возможность познакомиться с Университетом. В 2023–2024 году один из обучающихся, побывав на финал, твёрдо решил поступать именно в этот университет. На данный момент этот обучающийся является первокурсником Иннополиса с успешно закрытой первой сессией.

Подводя итог вышесказанному, рассмотрев некоторые аспекты организационно-педагогических мероприятий и способов организации образовательного процесса в указанных образовательных учреждениях дополнительной профильной подготовки школьников как потенциальных призёров и победителей высокоуровневых олимпиад по робототехническим направлениям, акцентируем, что подвижность процесса подготовки, связанный с постоянным поиском не просто новых форм/форматов взаимодействия образовательных организаций и представителей индустрии, но зависит от активного, понимающего сотрудничества представителей учебно-тренировочных центров с руководством регионов (осуществляемого пристрастный мониторинг развития образовательных технологий, привлечения грантов, вовлечения университетов, научно-производственных предприятий, способных стать площадками для реализации теоретических основ подготовки на практике и т.п.); взаимодействия и обмена опытом с аналогичными подразделениями на базе вузов, осуществляющих подготовку абитуриентов по техническим направлениям; участия в масштабных мероприятиях робототехнической направленности и смежных с ней областей, где происходит обмен опытом и т.д. В качестве рекомендаций, основанных опыте подготовки и реализации высокоуровневых мероприятий стоит уделить большое значение необратимому процессу цифровой трансформации не только образовательного процесса, но и общества в целом, благодаря которому дополнительное профильное образование можно рассматривать как вполне жизнеспособный проект с соответствующей системой ценностей, отвечающей самым актуальным направлениям, что, в свою очередь, создаёт соответствующие способы реализации поставленных задач для достижения целей. Поскольку технические отрасли в современном мире во многом определяют не только образовательную политику, то апробированные результаты деятельности описанных в данной статье образовательных организаций могут стать отправной точкой для региональных учреждений, начинающих свою детальность в самых дальних уголках страны, но ориентированных на качественную подготовку абитуриентов, в том числе для столичных вузов.

Заключение

В заключении хотелось бы привести замечательный пример из книги, который является иллюстрацией к тому, что сегодня представляет собой робототехническая среда: «когда в 2017 г. знаменитая программа AlphaZero (компании Google DeepMind), осуществила де-

марш в мир «homo sapiens» Г. Каспаров дал этому феномену определение «шахматы из другого измерения», которые «потрясли игру до самого основания» (Киссинджер, 2022, 17). Этот пример необходим над для того, чтобы подчеркнуть, что, обучая подростков, которые уже принадлежат, как минимум наполовину будущему, которые комфортно чувствуют себя в «другом измерении», педагоги-тренеры сектора дополнительного образования профильных инженерных вузов, должны, отдавая себе отчет в том, как свершившемся факте, регулярно улучшая собственные программы подготовки олимпиадников в области ИИ, ИТ и робототехнических наук в контексте того, что будущее уже проникло в настоящее и темпы этого проникновения лишь увеличиваются. И, что особенно важное показал наш собственный опыт, что имеет смысл такая практика, когда преподаватели вузов (будучи аспирантами, научными сотрудниками лабораторий и т.п.) выносят проблематику собственных работ на обсуждение со старшеклассниками – членами республиканских сборных, они получают значительное количество того, что принято определять, как «обратная связь», снабженную колоссальным количеством примеров из собственной практики, плюс еще множественные вариации и предложения по «совершенствованию» собственной профессиональной деятельности и как методиста, и как ученого-исследователя. Учитывая все, описанное выше, нам хотелось бы заметить, что в процессе подготовки учащихся к робототехническим олимпиадам высокого уровня, среди привычных задач, направленных на повышение эффективности и результативности процесса обучения олимпиадников, перед топовыми педагогами и тренерами стоят и сверхзадачи, которые заключаются: во-первых, во владениями всеми существующими на конкретный временной период, самым актуальным передовым контентом, существующим в данной области, а это, в свою очередь, требует ежечасного мониторинга технологий (даже находящихся в стадии разработок); во-вторых, тесное сотрудничество с индустрией для того, чтобы авторские задания были, что называется, взяты из реальности и соотносились с теми областями, в которых предстоит, возможно, работать «призеру» олимпиад, что будет являться дополнительным стимулом и мотивацией для учащихся, которые, будут осознавать, что решают реально важные задачи, а не разбирают абстрактные, умозрительные конструкции, одновременно, являясь частью глобальной мировой системы профессионалов, которые в данное время ломают голову над, пусть более сложными, но аналогичными заданиями; в третьих, насколько это возможно, осуществлять подготовку учеников на специально оборудованных, инновационных площадках, полигонах, платформах, позволяющих продемонстрировать как различного рода затруднения при решении конкретной задачи так и способы его преодоления. Эти пункты имеет смысл продолжать и далее, и мы надеемся, что реципиенты смогут добавить сюда пункты, соотносящиеся с потребностями и возможностями их собственных структур дополнительного образования в структуре олимпиадной активности. Собственно, такой подход к образовательному процессу и определяет статус и избранность его экспертов.

Список литературы

- Бляхман А.А., Назаров М.Г., Савинова С.Ю. и др. Модель региональной профориентационной экосистемы для детей и молодежи. Нижний Новгород: Дятловы горы, 2025.
- Косарецкий Г.С., Гошин М.Е., Беликов А.А. и др. Дополнительное образование детей в России: единое и многообразное. Под ред. С.Г. Косарецкого, И.Д. Фрумина. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2019.
- Киссинджер Г., Шмидт Э., Хатгенлокер Д. Искусственный разум и новая эра человечества. Пер. с англ. М.: Альпина ПРО, 2022.
- Ляхани К., Янсити М. Цифровое преимущество: искусство конкурировать в эпоху искусственного интеллекта. Перевод с английского А. Горячева, М. Павлова. М.: Эксмо, 2021.
- Партнёрские школы Иннополис Университета. Иннополис Университет. URL:<https://dovuz.innopolis.university/partnerschools>
- Полани М. Личностное знание. М.: Книга по Требованию, 2013.

- Смирнов И.П. Ум хорошо, а два лучше. Философия интеллекта. М.: Новое литературное обозрение, 2023.
- Уваров А.Ю., Гейбл Э., Дворецкая И.В. Трудности и перспективы цифровой трансформации образования. Под ред. А.Ю. Уварова, И.Д. Фрумина. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2019.
- Чубаров С.И., Копытов В.А. Подготовка школьников к участию в соревнованиях по спортивной робототехнике // Физико-математическое образование: цели, достижения и перспективы: Материалы Международной научно-практической конференции, Минск, 18–19 ноября 2019 года. Минск: Учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», 2019. С. 187–189.
- Чуприков С.С. Анализ олимпиад по робототехнике: достоинства, недостатки и возрастная дифференциация // Вестник науки. 2024. №10 (79). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-olimpiad-po-robototekhnike-dostoinstva-nedostatki-i-voznrastnaya-differentsiatsiya>
- Ягодкин Н.А., Згода А. Энциклопедия детской мотивации. М.: Эксмо, 2022.

Информация об авторах

Власова-Галасеева Наталия Михайловна; старший преподаватель кафедры теории и методики обучения информатике; ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского» (Российская Федерация, 150000, г. Ярославль, Ярославская область, ул. Республиканская, д. 108/1); E-mail: vlasova-galaseeva@yandex.ru; ORCID: 0009-0004-7335-5248;

Статкевич Ирина Алексеевна; доктор философских наук; доцент; ведущий научный сотрудник лаборатории гуманитарных и социальных наук; профессор отдела по работе с диссертационными советами и подготовке к защите диссертаций; АНО ВО «Университет Иннополис» (Российская Федерация, 420500, г. Иннополис, респ. Татарстан, ул. Университетская, д. 1); E-mail: i-statkevich@mail.ru; ORCID: 0009-0002-3729-8173;

Романовская Мария Александровна; начальник отдела по работе с талантливыми абитуриентами, управление приёма поступающих; ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при президенте Российской Федерации» (Российская Федерация, 119571, г. Москва, Московская область, пр-т. Вернадского, д. 82, с. 1); E-mail: m.romanovskaia@innopolis.ru; ORCID: 0009-0008-1907-7119.

PEDAGOGICAL EXPERIENCE AND TRENDS IN PREPARING TEENAGERS FOR ROBOTICS OLYMPIADS

Vlasova-Galaseeva N. M. senior lecturer	Yaroslavl State Pedagogical University named after K. D. Ushinsky
Statkevitsch I. A. Dr. Sci. (Philosophy), professor	Innopolis University
Romanovskaya M. A. Head of Department for Talented Prospective Students	Russian Academy of National Economy and Public Administration

Abstract. The article presents the experience of Innopolis University (Republic of Tatarstan) and the municipal supplementary education center “Voskhozhdenie” (Ya-

roslavl Region, Yaroslavl) in supporting and training participants for high-level robotics Olympiads, taking into account participant statistics and profiles. The study explores the distinctive approaches employed by both institutions and analyzes their outcomes using statistical data and participant profiling. The article examines both the unique practices of each organization and their common ground, which enables the creation of a unified analytical and experience-sharing framework. Special attention is given to how each institution fosters the development of skills essential for successful competition performance, including technical, creative, and teamwork abilities. Additionally, the article provides statistical insights into current trends in engineering, professional, and competitive robotics, allowing for an assessment of participant preparedness and emerging directions in the field.

Keywords: robotics competitions, Olympiads, specialized training programs, national and international contests, focused educational sessions, professional mentoring, pre-university education

For citation: Vlasova-Galaseeva N. M., Statkevich I. A., Romanovskaya M. A. Pedagogical Experience and Trends in Preparing Teenagers for Robotics Competitions. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2 (42), 8–20. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-8-20

Copyright: © N. M. Vlasova-Galaseeva, I. A. Statkevich, M. A. Romanovskaya (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Blyakhman, A. A., Nazarov, M. G., Savinova, S. Yu., et al. (2025). A Model of Regional Career Guidance Ecosystem for Children and Youth. Nizhny Novgorod: Dyatlovy Gory. (In Russ.)
- Chubarov, S. I., Kopytov, V. A. (2019). *Preparing School Students for Competitions in Sports Robotics. Physics and Mathematics Education: Goals, Achievements, and Perspectives: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference* (pp. 187–189). Minsk, November 18–19. Minsk: Maxim Tank Belarusian State Pedagogical University. (In Russ.)
- Chuprikov, S. S. (2024). Analysis of Robotics Olympiads: Advantages, Drawbacks, and Age Differentiation. *Bulletin of Science*, 10(79). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-olimpiad-po-robototekhnike-dostoinstva-nedostatki-i-voznrastnaya-differentsiatsiya> (In Russ.)
- Innopolis University. (n.d.). Partner Schools Program. Retrieved from <https://dovuz.innopolis.university/partnerschools>
- Kissinger, H., Schmidt, E., Huttenlocher, D. (2022). *The Age of AI and Our Human Future*. Translated from English. Moscow: Alpina PRO.
- Kosaretsky, G. S., Goshin, M. E., Belikov, A. A., et al. (2019). *Dopolnitelnoe obrazovanie detej v Rossii: edinoe i mnogoobraznoe*. Pod red. S.G. Kosareczkogo, I.D. Frumina. Moscow: Higher School of Economics Publishing House. (In Russ.)
- Lakhani, K., Iansiti, M. (2021). *Cifrovoe preimushhestvo: iskusstvo konkurirovat v epoxu iskusstvennogo intellekta*. Translated from English by A. Goryachev, M. Pavlova. Moscow: Eksmo. (In Russ.)
- Polanyi, M. (2013). *Lichnostnoe znanie*. Moscow: Kniga po Trebovaniyu. (In Russ.)
- Smirnov, I. P. (2023). *Um horosho, a dva luchshe. Filosofiya intellekta*. Moscow: Novoe Literaturnoe Obozrenie. (In Russ.)
- Uvarov, A. Yu., Gable, E., Dvoretzkaya, I. V., et al. (2019). *Trudnosti i perspektivy cifrovoj transformacii obrazovaniya*. Edited by A. Yu. Uvarov, I. D. Frumin. Moscow: Higher School of Economics Publishing House. (In Russ.)
- Yagodkin, N. A., Zgoda, A. (2022). *Enciklopediya detskoj motivacii*. Moscow: Eksmo. (In Russ.)

Information about the authors

Nataliya M. Vlasova-Galaseeva; Senior Lecturer; Department of Theory and Methods of Teaching Informatics; Yaroslavl State Pedagogical University named after K. D. Ushinsky (Russian Federation, 150000, Yaroslavl, Yaroslavl Region, Respublikanskaya St., 108/1); E-mail: vlasova-galaseeva@yandex.ru; ORCID: 0009-0004-7335-5248;

Irina A. Statkevich; Doctor of Philosophical Sciences; Associate Professor; Leading Researcher at the Laboratory of Humanities and Social Sciences; Professor at the Department for Work with Dissertation Committees and Dissertation Defence Preparation; Innopolis University (Autonomous Non-Profit Organization of Higher Education) (Russian Federation, 420500, Innopolis, Republic of Tatarstan, Universitetskaya St., 1); E-mail: i-statkevich@mail.ru; ORCID: 0009-0002-3729-8173;

Maria A. Romanovskaya; Head of the Department for Work with Talented Applicants, Admissions Office; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education) (Russian Federation, 119571, Moscow, Moscow Region, Vernadsky Ave., 82, Bldg. 1); E-mail: m.romanovskaia@innopolis.ru; ORCID: 0009-0008-1907-7119.

Статья поступила в редакцию	28.01.2026
Принята к публикации	25.03.2026
Статья опубликована	19.06.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-21-35

УДК
372.851**МОДЕЛЬ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ИНТЕРВАЛОВ
ДИДАКТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И ОСНОВАННАЯ НА НЕЙ
МЕТОДИКА****Лувсандорж Цогдов**
Доктор наук, профессор
Тувшинзаяа Юра
Преподаватель начального
образованияМонгольский государственный универси-
тет образования
Архангайский филиал Монгольского госу-
дарственного университета образования

Аннотация. Система математических знаний имеет структуру концентрических кругов, обусловленную когнитивным расширением. Дидактика математики рождается из дидактического преобразования знаний, соответствующих каждому концентрическому кругу математического содержания. Этот принцип объясняет сущность дидактического расширения предмета через дидактическое преобразование математического содержания, являющегося результатом когнитивного расширения. Пусть знание A_2 будет математическим расширением знания A_1 . Если D_1 , порождённая в результате дидактического преобразования содержания, является дидактикой для знания A_1 ; а D_2 – для знания A_2 , то D_2 будет дидактическим расширением D_1 . На основе использования приведённого выше определения дидактического расширения конструирована модель концентрических интервалов дидактических решений математики, и на её основе представлена дидактическая и методологическая ориентация, которая будет обсуждаться в рамках данной статьи.

Ключевые слова: дидактическое расширение, модель концентрических интервалов дидактических решений

Для цитирования: Лувсандорж Ц., Тувшинзаяа Ю. Модель концентрических интервалов дидактических решений и основанная на ней методика // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 2 (42). С. 21–35. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-21-35

Права: © Ц. Лувсандорж, Ю. Тувшинзаяа (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Дети и взрослые, изучающие математику, становятся умными, честными, уверенными в себе и скромными. Поэтому во многих странах мира, в том числе и в нашей стране придаётся большое значение математическому образованию подрастающего поколения. В рамках этой политики каждый монгольский ребёнок изучает математику в детских садах и общеобразовательных школах в общей сложности 18 лет. По этой причине математика занимает большую часть общеобразовательной программы нашей страны. В связи с этим значительную часть переменных затрат на предоставление общего образования для каждого ребенка занимают расходы на изучение и преподавание математики. Умные, честные, уверенные в себе, скромные граждане являются ценным богатством общества. Общество с такими гражданами – богатое, процветающее и благополучное. Именно математика является

основой для создания такого богатого, гуманного, процветающего общества. Однако качество курсов и преподавания математики в общеобразовательных школах нашей страны не соответствует потребностям и требованиям общества, движимого человеческим развитием, общества, которое ставит во главу угла прогресс и благополучие людей.

На протяжении многих лет качество математического образования в системе общего образования нашей страны было крайне неудовлетворительным, а средний показатель успеваемости по математике был очень низким. В течение долгого времени результаты ОВЭ (общий вступительный экзамен) по математике демонстрировали средний показатель в пределах от 10–30%. Тот факт, что средний показатель ОВЭ по математике имеет большой разброс, большое отклонение, а надежность и валидность самого экзамена проблематичны является острой проблемой дидактики математики. Для решения этой проблемы требуется выявить и контролировать взаимосвязи многих факторов. И это требует проведения обширных и масштабных исследований.

Качество урока зависит от качества его содержания, а качество содержания зависит от качества дидактического преобразования содержания, качество дидактического преобразования зависит от качества включённой деятельности (Vorovik, 2008). Качество математического образования в конечном итоге определяется совокупностью качеств многих единиц обучения. Качество каждого отдельного урока математики напрямую зависит от дидактической разработки учителем, дидактических решений и методики. Отсюда следует, что качество математического образования, а в итоге прогресс и развитие общества, в котором приоритетным является развитие человека, в первую очередь определяется качеством метода преподавания, качеством дидактических решений и дидактического преобразования содержания.

В связи с этим перед учителями математики встаёт вопрос о совершенствовании тематических разработок и дидактических решений содержания. С одной стороны, этот вопрос связан с качеством преподавания, а с другой, относится к области дидактики, которая является искусством обучения.

Для решения этого вопроса, возникающего перед учителями математики, в рамках этой статьи мы предлагаем разработанную нами “концентрическую модель дидактических решений”. Используя основные концепции, как дидактическое преобразование содержания и дидактическое расширение, путём дидактического преобразования математического содержания для каждого концентрического круга, нами была разработана и апробирована дидактическая техника.

Изученность темы

Дословно заимствованное на монгольский язык слово “дидактик”, “дидактика” на русском языке, “didactics” на английском языке происходит от древнегреческого слова “did-askhein, didascalía, didascalica”. Слово “Didaskhein” означает учить, развивать, обрабатывать (Oerbaek, 2010). В Древней Греции (с VIII-VI века до н.э. по 600 год н.э.) термин “Didaskaleion” употребляли при проведении репетиций учителей музыки и хоровых дирижеров (Illich, 1995). Работа французского философа Гуго Сен Виктора “Didascalicon”, опубликованная в 1120 году, была признана учебником по дидактике высшей школы Эпохи Возрождения (XIV-XV век) (Grabmann, 1998). 500 лет спустя немецкий педагог Вольфганг Ратке (1571–1635) в своей лекции “Искусство обучения Ратихии” впервые назвал дидактику искусством. Чешский педагог Ян Амос Коменский (1592-1670) написал свой главный труд “Великая дидактика” на чешском языке, который в 1638 году был переведён на латинский язык. В нём он называл дидактику “универсальным искусством обучения всех всему” (Коменский, 1989). Помимо основоположников, отцов дидактики Вольфганга Ратке, Яна Амоса Коменского в результате труда и вклада великих педагогов и дидактиков как И.Ф. Герbart (1762-1841), К.Д. Ушинский (1824-1870), Д. Дьюи (1859-1952), И.Г. Песталоци (1746-1827), П.Ф. Каптерев (1849-1922), М.А. Данилов (1899-1973), Б.П. Есипов (1894-1967), М.Н. Скаткин (1990-1991), Л.В. Занков (1901-1977), Ж. Пиаже (1896-1980), Л. Выготский (1898-1965) значение и содержание дидактики ещё больше обогатилось и развивается в

концепцию, предмет и область исследования, которая фокусируется на взаимосвязи трех ключевых понятий образования «учитель – ученик – содержание образования».

Дидактика – это наука, которая стремится объяснить и ответить на вопрос «кого, чему и как учить?» (обучать, преподавать, руководить и направлять), изучая явления преподавания, обучения и исследования через три основные переменные: «учитель – ученик – содержание образования», а также основные отношения «учитель – ученик», «учитель – содержание образования» и «ученик – содержание образования», и отношения между ними. Науку дидактики и сущность принято моделировать, представляя три основные переменные как вершины треугольника, а отношения между ними – как стороны треугольника с этими вершинами. Среди специалистов эта модель принято называть дидактическим треугольником (Oerbaek, 2010, p. 5).

С одной стороны эта модель служит теоретической ориентацией для понимания и эффективного применения дидактики, а с другой стороны, руководством и направлением для методов, технологий, дидактических решений, дидактических преобразований (Боровик, 2008), дидактических реконструкций (Mäntylä, 2011) и дидактической инженерии (Tchoshanov, 2013).

Методика исследования

Учитывая характер и особенности выдвинутой проблемы, а также цели, поставленные в рамках исследования в качестве философии, общего направления и ориентации исследования был выбран холизм; в качестве метода сбора данных, фактов и информации из первичных и вторичных источников – кейс-метод или метод конкретных ситуаций и мета-анализ; для выводов, умозаключений и саморефлексии – системный подход, диалектическая логика, индуктивный метод, метод интуиции; в качестве методологии – метод построения теории и интерпретации. Ниже кратко изложено обоснование выбора вышеуказанных методов, методологий и теоретических подходов.

Суть холизма¹, философии нашего исследования, заключается в том, что «целое всегда есть нечто большее, чем простая сумма его частей»², «Маленькие вещи могут иметь большое влияние на целое». Таким образом, холизм подчеркивает необходимость учёта всех факторов и переменных, а также рассмотрение объекта и субъекта исследования как единого целого. Эта особенность и подход отличают холизм от редукционизма³, который является «еще одной философией исследования, целью которой является познание целого путём деления целого на части, изучения каждой части, и наконец, суммирования результатов частей». Начиная с XVII века, который часто называют веком научной революции, и до конца XIX века основой научного мышления был редукционизм, а с начала XX века в исследовании стал использоваться холизм (Лувсандорж, 2014).

В данном исследовании, холизм служит общим методологическим подходом, а диалектическая логика применяется в качестве инструмента обеспечения обоснованности выводов. В соответствии требованиям полного и всецелого сбора источников, фактов и информации, необходимых для проверки гипотез, решения проблем, ответа на вопросы, построения теории и интерпретации, с целью сбора фактов из вторичных источников был использован мета-анализ, как метод, который «позволяет сделать общий вывод путём объединения и анализа преимуществ и результатов нескольких отдельных научных исследований» (Creswell, 2008, 92-94); а в качестве основного метода сбора данных из первичных источников был использован метод кейс-наблюдения (Creswell, 2008, 215-221).

В соответствии с целями исследования, данными, выводами и спецификой рассуждений в качестве основных методов использовались теоретические методы, такие как метод построения теории и интерпретации.

¹ Holism

² The whole is greater than the sum of parts

³ Reductionism

Теоретическое определение

Слово “онол” на монгольском языке имеет одинаковое значение со словом “theory” на английском; “теория” на русском; “*théorie*” на французском языке. Слово “онол” в монгольском языке имеет корень-глагол “оно”, “онох” и в противоположность от “отклоняться, сместиться в сторону, сдвигаться в сторону” означает “попасть в цель, сказать или сделать что-то абсолютно точное, правильное, уместное или попадающее в самую суть”. Так в монгольском языке, культуре и быту слово “онол” существовало и существует в значении “сказать или пояснить в самую суть”. Английское слово “theory”, русское “теория”, французское “*théorie*” произошли от греческого слова *theoria* (θεωρία),

Существует множество различных определений теории. Некоторые из них перечислены ниже:

– идеи, объясняющие предметы и явления; система принципов, используемых в качестве руководства для объяснения предметов и явлений⁴. Например, идеи Эйнштейна об относительности есть теория относительности. Принципы эволюции, используемые при объяснении происхождения человека, являются теорией эволюции;

– представления и гипотезы, выдвинутые из неполной информации и знаний⁵, например, теории, возникшие из результатов исследований в области социальных наук, такие как теория социальной структуры, бихевиоризм, конструктивизм, теория эволюции и т. д.;

– система принципов и методов, составляющих непрактическую часть науки и искусства⁶, например, теория классической музыки; математическая теория чисел, теория отражения в живописи и т. д.;

– объяснения с обоснованиями и доказательствами для понимания природы предметов и явлений⁷, например, дидактические теории и модели, объясняющие природу преподавания и обучения, теория обработки информации, теория деятельности, теории состояний развития мозга, перспективная теория музыкальных эмоций и т. д.;

– аналитический инструмент для выдвижения гипотезы, объяснения и понимания предметов и явлений⁸, например, теория Пифагора об отрицательных и положительных цветах;

– система значений, вытекающая из ряда предложений (постулатов), истинность которых не была окончательно доказана⁹, например, система геометрических аксиом Евклида, аксиоматическая теория, квантовая теория;

– концепция, выражающая мысленный образ или метод чего-либо, что должно быть сделано; система правил и принципов¹⁰. Например, эскизный рисунок стула, способ его изготовления, навык; основа или концепция какой-либо политики и т.д.;

– знания, широко применяемые в различных ситуациях; общепринятые принципы; система правил процедуры для объяснения, прогнозирования и анализа природы явлений¹¹. Например, математика, химия, биология, социология, статистика, политика, археология, архитектура, хирургия и т.д.;

– научная гипотеза, которая может быть доказана экспериментальным методом.¹²

⁴“Your Dictionary definition and usage example”, Copyright@2013 by LoveToKnow Corp

⁵The American Heritage® Dictionary of the English Language, 4th edition Copyright © 2010 by Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company. Published by Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company. All rights reserved.

⁶ URL:http://en.wikipedia.org/wiki/Philosophical_theory

⁷ definition in natural science, chemistry, biology

⁸ definition preferred in physics

⁹ URL:<http://www.math.uiuc.edu/~gfrancis/M302/handouts/postulates.pdf>, George, F. (2002). Axiomatic Systems for Geometry

¹⁰ URL:<http://dictionary.reference.com/browse/theory>

¹¹ URL:<http://www.m-w.com/dictionary/theory>

¹² URL:<http://www.businessdictionary.com/definition/theory.htm>

Из приведенных выше определений теории вытекают четыре ключевые характеристики теории:

- наличие гипотез;
- обоснованность;
- системность;
- применимость.

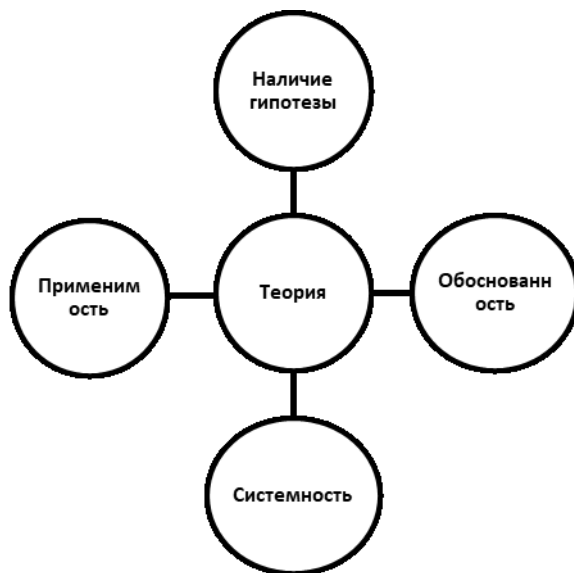


Рис. 1. Характеристики теории

Для эффективной теории установлены четыре критерия (John, 1998): основные концепты должны быть чётко сформулированы; должна быть определена область применения; должна иметь системную релевантность; наличие гипотезы.

Карл Поппер утверждал, что научный статус теории “определяется её фальсифицируемостью, опровергаемостью и проверяемостью”, а Филип Китчер утверждал, что научный статус теории определяется “(1) системным единством, (2) её вкладом в восполнении неполноты теории, (3) истинность определяется тем, содержит ли она недоказуемые гипотезы в рамках существующих знаний” (URL: [http:// www. amazon.com/ Stephen Hawking,a Brief History of Time](http://www.amazon.com/Stephen-Hawking-a-Brief-History-of-Time)).

Основные определения, концепты, построение

1. Дидактическое преобразование содержания

Что касается взаимосвязи “учитель-содержание” в дидактическом треугольнике, то «качество урока зависит от его содержания, а качество содержания от качества дидактического преобразования содержания, качество дидактического преобразования от качества включенной деятельности» (Borovik, 2008). Отсюда следует, что дидактическое преобразование содержания можно сравнить с деятельностью оператора, где чисто математическое содержание и знания трансформируются в доступную для усвоения учащимися учебную информацию. Поэтому дидактическое преобразование содержания можно определить следующим образом.

Определение 1. Дидактическое преобразование это дидактическое действие по трансформированию научных знаний, концепций и содержания для их эффективного усвоения обучающимися.

Всякий раз, когда создаются дидактические условия и возникает дидактическое явление, учитель опираясь на достижения и успехи дидактической науки, осуществляет дидактическую трансформацию¹³, дидактическую реконструкцию¹⁴, дидактическую

¹³ Didactic transformation

¹⁴ Didactic reconstruction

инженерии¹⁵ содержания. В результате этих действий учитель создаёт решение для преподавания содержания учащимся. С одной стороны, это является методической разработкой **темы**, дидактикой предмета, а с другой стороны, дидактическим решением и методологией учителя.

2. Дидактическое расширение

Система математических знаний представляет собой концентрическую структуру, являющуюся результатом когнитивного расширения. В результате дидактического преобразования знаний, относящихся к каждому концентрическому кругу математического содержания, рождается его дидактика. Согласно этому принципу, сущность дидактического расширения содержания объясняется дидактическим преобразованием математического содержания, являющегося результатом когнитивного расширения.

Определение 2. Пусть знание A_2 будет математическим расширением знания A_1 . Дидактика знания A_1 , порожденная дидактическим преобразованием содержания, это дидактика D_1 ; если для знания $A_2 - D_2$, то D_2 является дидактическим расширением D_1 .

Концентрические интервалы дидактических решений, построение и основные действия



Рис. 2. Модель концентрических интервалов математических дидактических решений

Для создания концентрических интервалов дидактических решений математического содержания выполняются следующие три шага:

1. математическое расширение;
2. дидактическое преобразование содержания;

¹⁵ Didactic reengineering

3. дидактическое расширение.

При математическом расширении группы тем или содержания учитель опирается преимущественно на свои математические знания и профессиональные навыки, тогда как при дидактическом преобразовании темы и содержания использует методические и дидактические навыки. При выявлении и построении дидактического расширения содержания, наблюдаемого в результате этих двух действий, математические и дидактические знания учителя, используются как единое целое.

Используя определение дидактического расширения и значение трех основных операций, упомянутых выше, была построена модель концентрических интервалов математических дидактических решений (рис. 2).

Модель концентрических интервалов математических дидактических решений проиллюстрирована ниже на примере арифметики, геометрии, алгебры, теории вероятностей и статистики, которые являются основными областями содержания курсов математики в общеобразовательных школах (рис. 2.1; рис. 2.2, рис. 2.3, рис. 2.4).



Рис. 2.1. Модель концентрических интервалов дидактических решений по арифметике

Число два является результатом расширения единицы на один путём объединения двух единиц, когда одна единица складывается с другой. Следовательно, дидактика числа два отличается от дидактики единицы только расширением единицы “плюс один”. Другими словами, если дидактика единицы расширяется в результате добавления “плюс один”, возникает дидактика числа два. Так как эта закономерность повторяется для концентрических кругов арифметического содержания дидактика арифметики отличается от дидактики единицы только “плюсом один”. Рассматривая этот инвариант дидактического расширения в арифметике,

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

дидактика арифметики эквивалентна дидактике “один, один плюс один”. Другими словами, дидактика единицы, и к ней плюс один, короче говоря (1, +) в целом становится дидактикой арифметики.

Итак, суть изучения арифметики, преподавания арифметики заключается в том, чтобы научить понимать понятия единицы (1) и операции сложения (+).

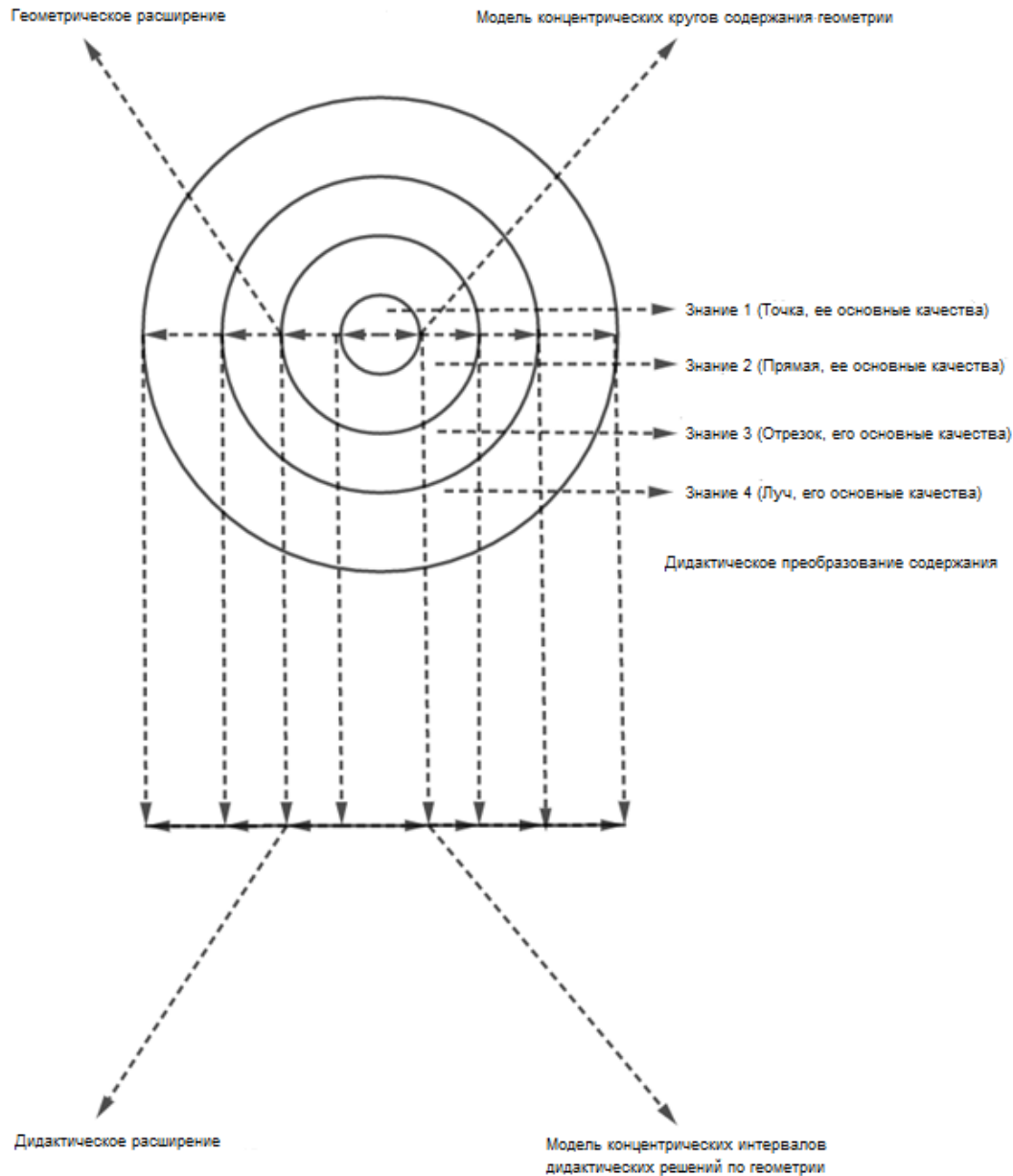


Рис. 2.2. Модель концентрических интервалов дидактических решений по геометрии

Из модели концентрических интервалов дидактических решений видно, что точечная дидактика отличается от дидактики прямых линий, отрезков и углов только дидактикой их математических расширений. Хотя точка является ментальной конструкцией и абстрактным понятием, не имеющая никаких физических характеристик, в дидактическом смысле ее можно изобразить как “след, оставленный острым карандашом на бумаге”. Это и есть дидактика точки. Прямая линия тоже является ментальной конструкцией и абстрактным понятием, которая не обладает физическими характеристиками, но её можно представить как изображение, например, “след от карандаша по линейке на бумаге”. Это дидактика прямой линии. Отметив две точки, расположив через них линейку и соединив две точки карандашом,

мы можем увидеть как из двух точек формируется линия, и путем расширения из дидактики точки вытекает дидактика линии.

Таким образом, модель концентрических интервалов дидактических решений геометрии показывает, что в ядре дидактики геометрических знаний и понятий существует “структурная организация” через использование изображений. Другими словами, геометрическая дидактика приобретает структурную организацию.

Отсюда, из модели концентрических интервалов дидактических решений геометрии возникает дидактика геометрии, одна версия методики, основанная на структурной организации. Суть этой методологии, возникшей в результате дидактического расширения, состоит в том, чтобы наглядно с помощью реальных инструментов, таких как линейка, циркуль или карандаш объяснить абстрактные геометрические понятия и ментальные конструкции путем наделения им физических образов, что позволяет знакомить с геометрией.

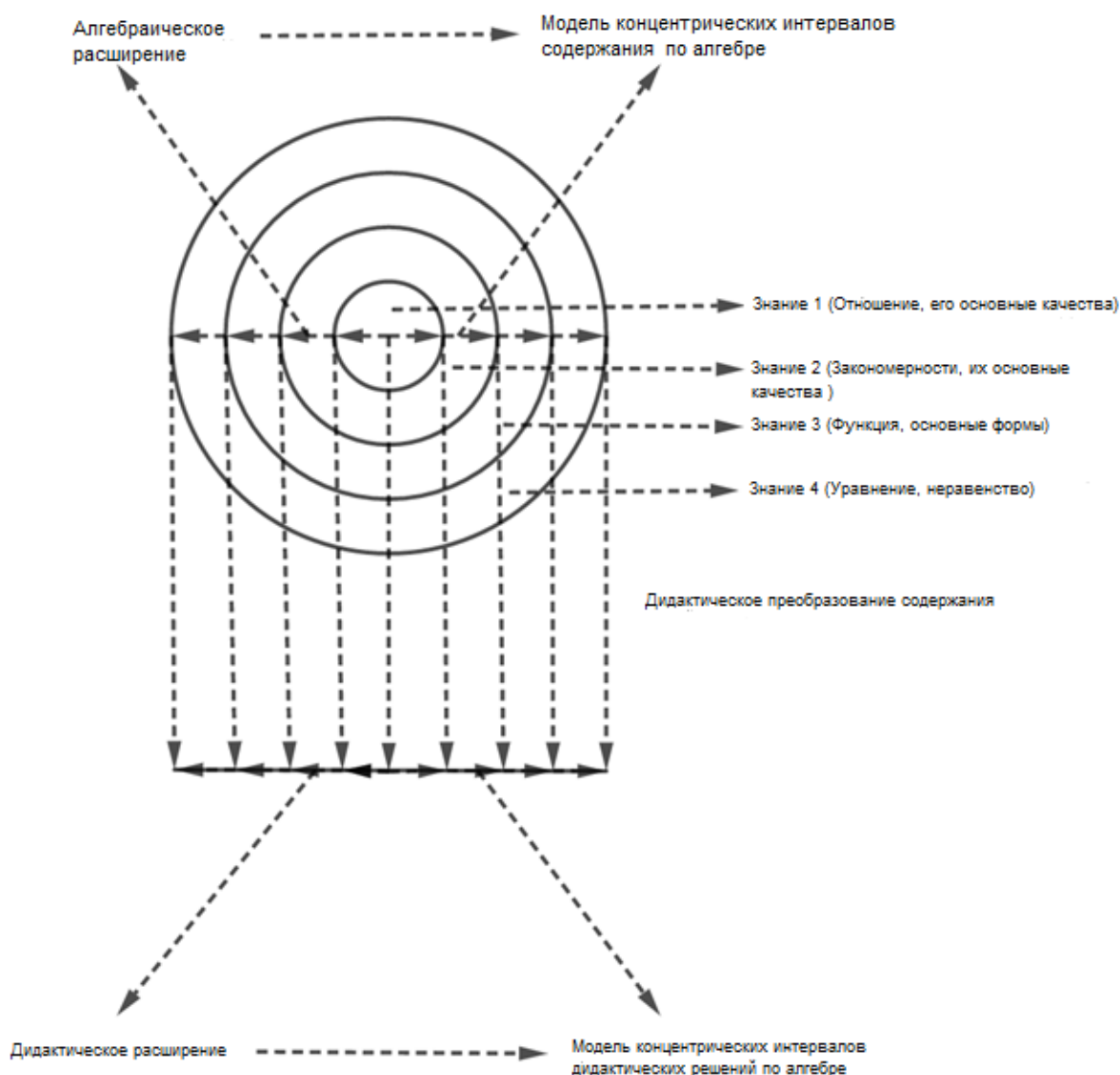


Рис. 2.3. Модель концентрических интервалов дидактических решений по алгебре

Из модели концентрических интервалов дидактических решений алгебры видно, что дидактики предмета отличаются между собой только дидактикой ключевых понятий, как взаимосвязь, сокращение, преобразование, функция, уравнение, а также символы, буквы, числа и буквы, алгебраические действия, закономерности и дидактикой математического расширения этих понятий (рис. 2.3).

Одно знание рождается из другого путём расширения основных отношений и операций алгебры, которые представляют собой ядро концентрической окружности содержания алгебры и инвариант содержания. Например, дидактика, рожденная путём дидактического преобразования содержания знания 2, отличается от дидактики знания 1 только своим расширением.

Рассматривая этот инвариант дидактического расширения алгебраических отношений, операций и правил, можно сказать, что дидактика алгебры в целом эквивалентна “отношениям, операциям и правилам алгебры”. Другими словами, дидактика алгебраических отношений, операций и правил в целом становится дидактикой алгебры, то есть методами её преподавания.

Итак, суть изучения и преподавания алгебры заключается в искусстве наилучшим образом донести до учащихся эти отношения, операции и правила алгебры.

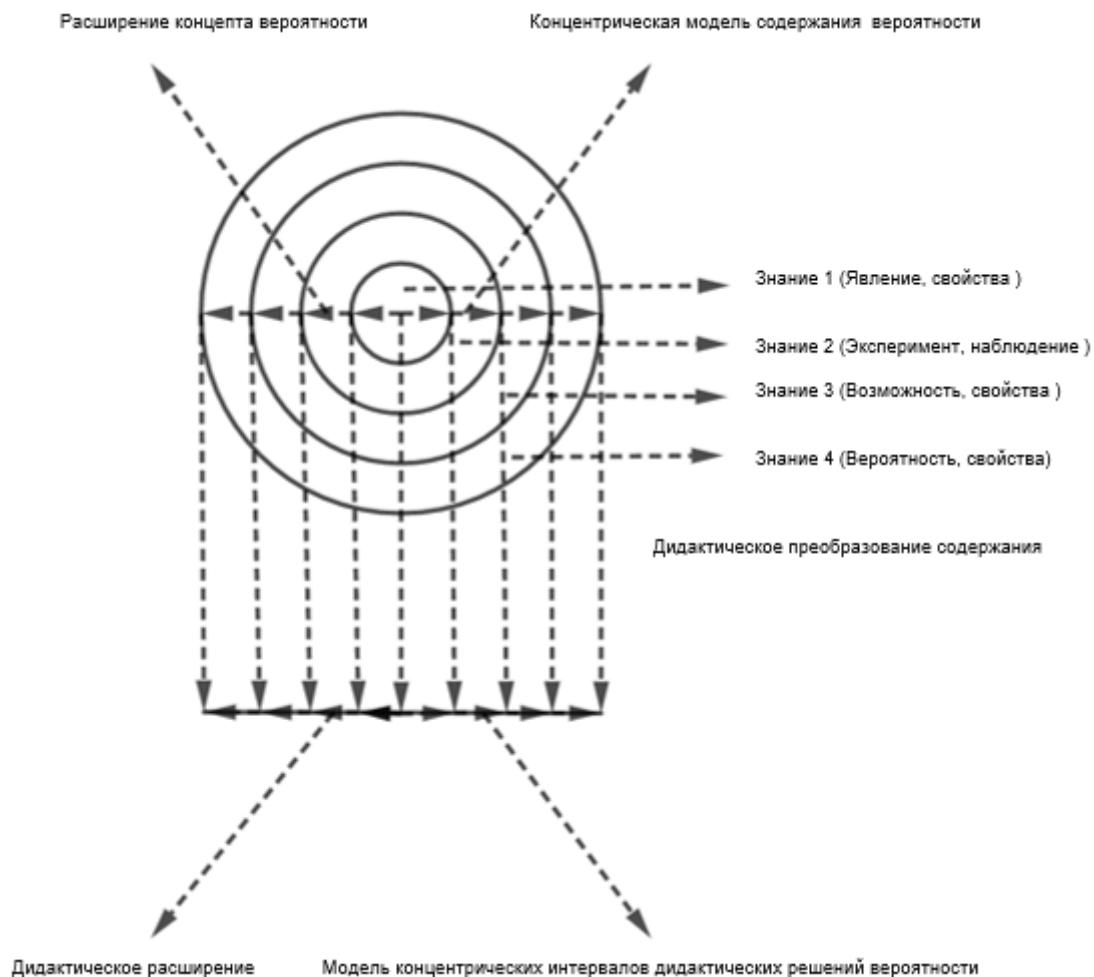


Рис. 2.4. Модель концентрических интервалов дидактических решений по вероятности

Из модели концентрических интервалов дидактических решений алгебры возникает методическая версия дидактики алгебры, суть которой заключается в выполнении отношений и операций алгебры по правилам.

Одно знание рождается из другого посредством математического расширения таких понятий, как явление, эксперимент, наблюдение, возможности, вероятность, которые представляют собой ядро, инвариант содержания вероятностных моделей в виде концентрических кругов.

Если рассматривать в этой модели инвариант дидактического расширения явлений, экспериментов, наблюдений, подсчёта возможностей и вычисления вероятностей, то дидактика вероятностей в целом эквивалентна “проведению эксперимента, наблюдения,

подсчету возможностей и вычислению вероятностей”. Другими словами, дидактика экспериментов, наблюдения, подсчёта возможностей и вычисления вероятностей является в целом дидактикой вероятностей (рис. 2.4).

Итак, суть обучения и преподавания вероятностей заключается в искусстве научения учащихся ставить эксперименты, проводить наблюдения, подсчитывать возможности и вычислять вероятности.

Из модели концентрических интервалов дидактических решений возникает дидактика вероятности, одна методическая версия, суть которой заключается в проведении экспериментов, наблюдений, подсчитывании возможностей и вычислений вероятности.

Апробация, применение и примеры модели концентрических интервалов дидактических решений

Ниже приведён пример использования модели концентрических интервалов дидактических решений для методической разработки числовых множеств и их операций (Таблица 1).

Таблица 1.

Методология, основанная на модели концентрических интервалов дидактических решений по теме “Множество чисел”

<i>Тема</i>	<i>Дидактика</i>	<i>Новые дидактические трудности</i>
Натуральные числа		Считать?
Целые числа	D_n , нуль, противоположные числа	Отношение двух целых чисел, бесконечные, периодические десятичные дроби
Рациональные числа	$(Z_D, \text{соотношения})$	Дидактика 0, противоположных чисел?
Иррациональные числа	Q_D непериодические	Непериодические десятичные дроби?
Действительные числа	Q_D и дидактика иррациональных чисел	Законы?
Комплексные числа	$C_D, (R_D, \text{мнимые числа})$	Мнимая часть?

Экспериментальное применение модели концентрических интервалов дидактических решений и его результаты

Ниже представлена дидактика и методика изучения темы «Вычисление суммы внутренних углов выпуклого многоугольника» на основе модели концентрических интервалов дидактических решений.

В соответствии модели концентрических интервалов дидактических решений:

A1: Треугольник, сумма его внутренних углов.

D1: Дидактика суммы внутренних углов треугольника как результат дидактического преобразования содержания A1.

A2: Выпуклый многоугольник, сумма его внутренних углов.

D2: Дидактика суммы внутренних углов выпуклого многоугольника как результат дидактического преобразования содержания A2.

Согласно модели концентрических интервалов математических знаний «Знания о выпуклом многоугольнике и сумме его внутренних углов (A2)» является математическим расширением «Знаний о треугольнике и сумме его внутренних углов» (A1). Таким образом, согласно модели концентрических интервалов дидактических решений D2 является логическим расширением D1, направленным на формирование знаний A2, преобразуя знания A1 на новом уровне обобщения.

Следовательно, выпуклый четырёхугольник можно разделить диагональю на два треугольника, а выпуклый пятиугольник можно разделить на три треугольника с помощью диагоналей, проведённых из одной вершины. Следовательно, проведение диагоналей из

одной фиксированной вершины разбивает выпуклый N -угольник на $N-2$ треугольника. Таким образом, дидактика D2 является результатом повторения сложения углов треугольника $(N-2)$ раз. Другими словами, можно видеть, что D2 вытекает из D1 через дидактическое расширение.

В качестве примера на рисунке показано как выпуклый пятиугольник разбивается на три треугольника диагоналями, исходящими из одной вершины (рис. 2.5.).

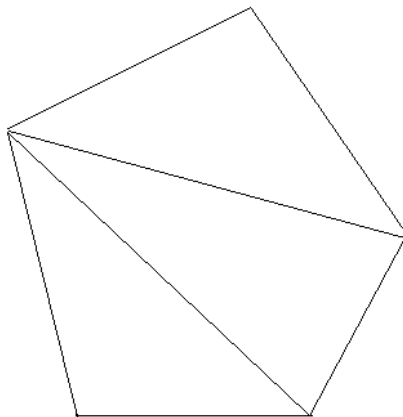


Рис. 2.5. Выпуклый пятиугольник, разбитый диагоналями, исходящими из одной вершины

Следовательно, основываясь на модели концентрических интервалов дидактических решений (D2) урок по теме «Вычисление суммы внутренних углов выпуклого многоугольника» планируется следующим образом:

- с помощью линейки ученики рисуют выпуклый многоугольник. При этом количество вершин выпуклого многоугольника для каждого ученика может отличаться;
- из одной вершины выпуклого многоугольника ученики проводят все диагонали;
- ученики считают количество возникших треугольников. Потом вырезают нарисованный выпуклый многоугольник по диагонали, и считают количество возникших треугольников;
- напомним учащимся, что сумма внутренних углов любого треугольника равна мере развёрнутого угла и обратим их внимание на то, что если умножить меру развёрнутого угла на количество образованных треугольников, то получится сумма внутренних углов первоначально нарисованного выпуклого многоугольника.

Применение методики преподавания, основанной на модели концентрических интервалов дидактических решений задачи о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника, демонстрирует высокую эффективность, значительно повышая вовлеченность, активность учащихся и улучшая их реальную успеваемость, что показывает видеозапись урока.

Модель концентрических интервалов дидактических решений была апробирована среди учителей столичной общеобразовательной школы МОНГЕНИ на примере содержания плоскостной геометрии (планиметрии). Это апробирование показало, что содержание может быть дидактически реализовано с помощью модели концентрических интервалов дидактических решений. Для использования в общеобразовательных школах было создано 40 презентаций по планиметрии, воплощающих нашу методику. Результаты обобщены и опубликованы в виде книги, доступной широкой публике (Лувсандорж, 2021).

Заключение

Для каждого раздела математического содержания и тематической группы может быть создана модель концентрических интервалов дидактических решений. При создании концентрических интервалов дидактических решений рождается разработка математической темы, дидактическое решение и создаётся новая методологическая версия. В процессе построения концентрических интервалов дидактических решений выполняются три

действия: расширение содержания математики, дидактическое преобразование содержания и дидактическое расширение содержания как результат дидактического преобразования. При математическом расширении содержания по тематическим группам учитель опирается преимущественно на свои математические знания и профессиональные навыки, тогда как при дидактическом преобразовании содержания использует свои методические и дидактические навыки. Эти два процесса (математическое расширение и дидактическое преобразование) формируют дидактическое расширение содержания, интегрируя математико-дидактические знания и навыки учителя.

Дидактическая ценность, познавательная значимость данной научно-исследовательской работы заключается в предложении теоретического подхода в дидактике и методологического приёма, которые могут быть использованы независимо от темы при разработке учителем методики, дидактических решений и тематической разработке, являющихся основополагающими и фундаментальными переменными для повышения качества математического образования в общеобразовательных школах. Работа также демонстрирует практическое применение предложенного подхода.

Список литературы

- Коменский Я.А., Локк Д., Руссо Ж.-Ж., Песталоцци И.Г. Педагогическое наследие. М.: Педагогика, 1989.
- Borovik, A. (2008). Didactic transformation. www.academia.edu/
- Creswell, J. (2008). New Jersey: Educational research. Pearson International, Inc.
- Grabmann, M. (1998). Hugh St. Victor's Didascalicon: en hoyskolepedagogikk'for det 12. Arhundre. Agora, 1. pp. 39-46.
- Illich, I. (1995). In the graveyard of the text: a commentary to Hugh's Didascalicon. Chicago: University of Chicago Press.
- Luvsandorj, Ts. (2009). Towards Reconsidering Strategies for Ensuring Gender Equality In Education in the Light of Neuroscience: Either Equality through Difference or Equality through Sameness or Neither 'Through Difference' nor 'Through Sameness'?: Critical review. Retrieved from: <http://mr-institute.blogspot.com>
- Mäntylä, T. (2011). Didactical reconstructions for organizing knowledge in physics teacher education. Retrieved from <http://ethesis.helsinki.fi/>
- Oerbaek, K. (2010). Didactics and didactisizing. Retrieved from www.albany.edu/cela/publication/article/Didactics.pdf
- Tchoshanov, M. (2013). Engineering of Learning: Conceptualizing e-Didactics. Moscow: UNESCO Institute for Information Technologies in Education.
- Wacker, J.G. (1998). A Definition of Theory: Research Guidelines for Different Theory-Building Research Methods in Operations Management. *Journal of Operations Management*, 16, 361-385. DOI: 10.1016/S0272-6963(98)00019-9

Информация об авторах

Лувсандорж Цогдов; доктор наук; профессор; заведующий кафедрой дидактики; Монгольский государственный университет образования (Монголия, 14191, Улан-Батор-48, VIII микрорайон, Бага тойруу-14); E-mail: luvsandorj@msue.edu.mn; ORCID: 0009-0005-5317-6549;

Тувшинзаяа Юра; преподаватель начального образования; Архангайский филиал Монгольского государственного университета образования (Монголия, Архангайский аймак, Улица “Тээвэрчид гудамж 3–329”, 1-й баг сомона Эрдэнэбулган); E-mail: tuvshinzaya@msue.edu.mn; ORCID: 0009-0007-7070-4512

**CONCENTRIC INTERVAL MODEL OF DIDACTIC SOLUTIONS AND
A METHODOLOGY BASED ON IT**

Luvsandorj Tsogdov Doctor of Sciences, Professor	Mongolian National University of Education
Yura Tuvshinzaya Primary Education Teacher	Arkhangai Branch of the Mongolian National University of Education

Abstract. Since any new knowledge in the nature of mathematics is recognized as a result of some mathematical extension, the system of knowledges of mathematics is, therefore, represented as a set of concentric circles in terms of cognition. At the same time, it argues that the didactic transformation of a concentric circle representing any content in the system of knowledges of mathematics bears the didactics of such content or knowledge. Having considered this idea as a guiding principle, we define a didactic extension as follows: Let A_2 be an extension of any knowledge of A_1 . Suppose that there exists a didactic transformation whereby D_1 is any didactics of the mathematical knowledge of A_1 and also D_2 is that of A_2 . Then, D_2 is said a didactic extension of D_1 . Using the concept of didactic extension defined as above, we are going to construct a didactic approach called as a concentric interval model of didactic solutions of the mathematical contents and then offer a teaching method based on the model for some topics of primary school mathematics.

Keywords: didactical extension, a concentric interval model of didactic solutions

For citation: Luvsandorj Ts., Tuvshinzaya Yu. (2026). Concentric Interval Model of Didactic Solutions and a Methodology Based on it. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2026, 2 (42), 21–35. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-21-35

Copyright: © Ts. Luvsandorj, Yu. Tuvshinzaya (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Borovik, A. (2008). Didactic transformation. www.academia.edu/
- Creswell, J. (2008). New Jersey: Educational research. Pearson International, Inc.
- Grabmann, M. (1998). Hugh St. Victor's Didascalicon: en hoyskolepedagogikk'for det 12. Arhundre. *Agora*, 1. pp. 39-46.
- Illich, I. (1995). In the graveyard of the text: a commentary to Hugh's Didascalicon. Chicago: University of Chicago Press.
- Komenskij, Ya. A., Lokk, D., Russo, Zh. Zh., Pestalocci, I. G. (1989). *Pedagogicheskoe nasledie*. Moscow: Pedagogika. (In Russ.).
- Luvsandorj, Ts. (2009). Towards Reconsidering Strategies for Ensuring Gender Equality In Education in the Light of Neuroscience: Either Equality through Difference or Equality through Sameness or Neither 'Through Difference' nor 'Through Sameness'?: Critical review. Retrieved from: <http://mr-institute.blogspot.com>
- Mäntylä, T. (2011). Didactical reconstructions for organizing knowledge in physics teacher education. Retrieved from <http://ethesis.helsinki.fi/>
- Oerbaek, K. (2010). Didactics and didactisizing. Retrieved from www.albany.edu/cela/publication/article/Didactics.pdf

- Tchoshanov, M. (2013). Engineering of Learning: Conceptualizing e-Didactics. Moscow: UNESCO Institute for Information Technologies in Education.
- Wacker, J. G. (1998). A Definition of Theory: Research Guidelines for Different Theory-Building Research Methods in Operations Management. Journal of Operations Management, 16, 361-385. DOI: 10.1016/S0272-6963(98)00019-9

Information about the authors

Ts. Luvsandorj; Doctor of Sciences; Professor; Head of the Department of Didactics; Mongolian National University of Education (Mongolia, 14191, Ulaanbaatar-48, Microdistrict VIII, Baga Toiruu-14); E-mail: luvsandorj@msue.edu.mn; ORCID: 0009-0005-5317-6549;

Yu. Tuvshinzaya; Primary Education Teacher; Arkhangai branch of the Mongolian National University of Education (Mongolia, Arkhangai aimag, Teeverchid gudamj street 3-329, 1st bag of Erdenebulgan soum); E-mail: tuvshinzaya@msue.edu.mn; ORCID: 0009-0007-7070-4512

Статья поступила в редакцию 07.02.2026
Принята к публикации 20.04.2026
Статья опубликована 19.06.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-36-44

УДК
372.851

**КРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ НА МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ
КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ ЭФФЕКТИВНОЙ ОБРАТНОЙ
СВЯЗИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО
МАТЕМАТИКЕ**

Чернышов Владислав Петрович
аспирант

ФГБОУ ВО «Пензенский государственный
университет»

Аннотация. Работа посвящена исследованию эффективности использования критериальных заданий на метод исключения в процессе подготовки школьников к итоговой аттестации по математике. Актуальность исследования определена постоянно меняющимися стандартами и требованиями современной системы образования. Введение работы призвано раскрыть значимость обратной связи в процессе подготовки к государственной итоговой аттестации, а также необходимость интегрирования более эффективных средств и инструментов подготовки в образовательный процесс. Анализ литературы позволил выявить проблемы контроля процессуальной стороны решения заданий государственной итоговой аттестации и основные пути их решения. Методология исследования включает комплексный анализ критериального задания на метод исключения с рассмотрением его структуры и вариантов возможных решений. Кроме того, в рамках исследования выявлены принципы формулировки критериев оценивания и принципы структурирования заданий. В заключении представлены выводы, подчёркивающие преимущества и важность интегрирования критериальных заданий на метод исключения в процесс подготовки к итоговой аттестации по математике.

Ключевые слова: обратная связь, критериальное задание, средство обучения, метод исключения, итоговая аттестация

Для цитирования: Чернышов В.П. Критериальные задания на метод исключения как средство реализации эффективной обратной связи при подготовке к итоговой аттестации по математике // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 2 (42). С. 36–44. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-36-44

Права: © В.П. Чернышов (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Государственная итоговая аттестация (ГИА) – это неотъемлемый компонент системы образования Российской Федерации, завершающий этап освоения основных образовательных программ основного общего (ОГЭ) и среднего общего (ЕГЭ) образования (Безрукова, 2020). Она призвана обеспечить объективную, унифицированную и достоверную оценку уровня подготовки обучающихся и их соответствие требованиям Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС) (Федеральный закон, 2012).

Итоговая аттестация, завершающая освоение основных образовательных программ основного общего и среднего общего образования, является обязательной и проводится в

порядке и в форме, которые установлены образовательной организацией, если иное не установлено настоящим Федеральным законом (Федеральный закон, 2012). Она проводится с целью обобщения и укрепления полученных знаний, их систематизации, контроля уровня усвоения учебного материала, проверки умения применять освоенные знания при решении практических задач, а также оценки наличия у обучающихся устойчивых навыков решения задач, характерных для конкретного учебного предмета.

Успешная подготовка к итоговой аттестации требует грамотно выстроенной системы обратной связи, обеспечивающей непрерывное взаимодействие между всеми участниками образовательного процесса и способствующей оперативной адаптации учебного процесса под потребности каждого обучающегося (Родионов, Чернышов, 2024).

Ключевая значимость обратной связи заключается в её способности обеспечивать качественный самоконтроль (Чернобай, 2023), который является фундаментом успешного обучения (Родионов, Дедовец, Чернышов, 2024), особенно в современных условиях модернизации системы образования, где происходит существенная трансформация подходов к оценке образовательных результатов обучающихся (Родионова, 2020). Традиционная система оценивания уступает место критериальному оцениванию, которое является одним из ключевых принципов Федерального государственного образовательного стандарта (Федеральный закон, 2012), позволяющим дифференцировать процесс обучения, фиксировать индивидуальные достижения в динамике, исключить субъективность оценки, определить понятные и открытые критерии оценивания (Муканова, 2022).

Для эффективной реализации существующего социального заказа в сфере эффективной подготовки к итоговой аттестации необходимо разрабатывать и внедрять современные средства контроля знаний, отвечающие актуальным требованиям государственной итоговой аттестации (Евграфов, 2019). Одним из таких средств контроля может выступать критериальное задание на метод исключения (Ромас, 2020).

В отличие от традиционных форм контроля, критериальные задания разрабатываются с учётом конкретных критериев эффективности и позволяют максимально точно отследить прогресс каждого обучающегося в освоении учебного материала (Родионов, Чернышов, 2024). Они становятся тем инструментом, который помогает реализовать принципы критериального оценивания на практике, обеспечивая объективность и достоверность получаемых результатов.

Обзор литературы

Многочисленные научные работы В.М. Янковской, Ю.В. Ахтырской, Л.С. Вакуленко, Е.Н. Стремоусовой, Л.А. Петровской и других исследователей подтверждают, что для преодоления основных барьеров, препятствующих эффективной реализации обратной связи, необходим систематический анализ критериев её эффективности (Янковская, 2016).

В исследованиях А.Н. Майорова были выявлены существенные недостатки традиционной системы контроля и оценки. Главным из них выступает чрезмерный субъективизм в оценивании, приводящий к отсутствию единых стандартов и критериев оценки учебных достижений обучающихся. Автор убедительно показал низкую эффективность традиционных методов контроля, их недостаточную информативность и сложность в определении реального уровня освоения материала. Существенным недостатком также является отсутствие возможности массового одновременного контроля знаний и непрозрачность системы оценивания для обучающихся (Майоров, 2005).

О.А. Некрасова пишет о том, что содержание не всегда ориентировано на контроль процессуальной стороны выделенного математического умения. При этом из результатов опроса следует, что большинство педагогов не обращает внимания на данный аспект, полностью доверяя разработанным методистами проверочным материалам, не проводя необходимого анализа их содержания, что снижает эффективность обратной связи в обучении математике (Некрасова, 2005).

На основании многочисленных исследований А.К. Артемова, М.А. Родионова, О.А. Некрасовой, Ш.А. Амонашвили, В.Л. Беспалько, Д.Б. Эльконина, М.Ю. Демидовой, С.В. Иванова и других ученых можно утверждать, что эффективную систему организации обратной связи позволяет обеспечить критериальное оценивание, которое представляет собой процесс оценивания, базирующийся на сравнении достижений обучающихся с четко определенными, коллективно выработанными и заранее известными всем участникам образовательного процесса критериями, находящимися в полном соответствии с целями и содержанием образования и направленными на формирование у обучающихся умения учиться (Аскарова, 2014).

Применительно к математике, особенно в контексте подготовки к итоговой аттестации, основным средством реализации такого оценивания могут служить критериальные задания, представляющие собой специально разработанный инструмент педагогической диагностики. Особенность критериальных заданий заключается в их четкой ориентированности на определение степени соответствия результатов обучения установленным стандартам и требованиям.

О.А. Некрасова отмечает, что решение обучающимся критериальных заданий является показателем эффективности управления обучением в целом, уделяя особое внимание принципиальным различиям в функциях разных типов задач (Некрасова, 2005).

В исследованиях Т.Ю. Новичковой, Е.М. Хвастуновой и С.Н. Ячиновой выделяются критерии конструирования системы критериальных заданий, а также критерии отбора тестовых заданий, как одного из этапов критериального задания (Новичкова, 2014).

А.Т. Лялькина и Н.М. Червякова рассматривали процессуальные задачи как средство развития математического мышления, выделяя основные особенности подобного типа заданий и их эвристический характер, т. е. направленность на открытие решения (Лялькина, 1999).

Результаты анализа свидетельствуют о том, что интеграция системы критериальных заданий в образовательный процесс при подготовке к итоговой аттестации является наиболее результативным инструментом для решения комплекса значимых педагогических задач, описанных ранее. Исследования М.А. Родионова, О.А. Некрасовой, Г.А. Балла, В.П. Беспалько, О.Б. Епишевой, Г.И. Саранцева и других учёных демонстрируют, что критериальные задания обеспечивают не только объективный, систематический и эффективный контроль, но и создают условия для развития метапредметных навыков обучающихся.

Несмотря на большое количество научных исследований в области критериальных заданий, специфика метода исключения требует дополнительного осмысления. Данный метод, являясь одним из наиболее эффективных инструментов проверки знаний и формирования математических умений, до настоящего момента не получил должного теоретического осмысления и практического применения в контексте подготовки к государственной итоговой аттестации по математике.

В современной педагогической науке отсутствуют единые подходы к определению сущности метода исключения в контексте критериального оценивания. Различные исследователи трактуют его либо как вспомогательный приём внутри более широких диагностических методик, либо как самостоятельный инструмент формирования и проверки знаний.

Методология исследования

Метод исключения базируется на фундаментальных математических принципах и позволяет обучающимся осваивать сложные концепции через практическое применение. В основе метода лежит логическая процедура последовательного отсева неверных вариантов на основании установленных критериев.

Педагогическая ценность метода обусловлена его многофункциональностью:

1) он развивает навыки аналитического мышления, поскольку требует от обучающихся не просто выбора правильного ответа, но и аргументированного обоснования, почему остальные варианты не соответствуют условиям задачи;

2) укрепляет понимание внутренних взаимосвязей между математическими понятиями, так как для корректного исключения неверных решений необходимо осознанно применять соответствующие свойства и теоремы;

3) формирует культуру математического рассуждения, формируя умение выстраивать цепочку выводов, опирающуюся на аксиомы, определения и ранее доказанные утверждения;

4) повышает осознанность применения алгоритмов.

Задания на метод исключения должны иметь чёткую формулировку условия, возможность применения различных способов исключения, систему подсказок (при необходимости) и соответствовать возрастным особенностям обучающихся или направлению математической подготовки.

Рассмотрим пример решения критериального задания на метод исключения. Подобное задание встречается в 11 номере ОГЭ по математике и в 7 задании базового уровня ЕГЭ по математике, однако, задания итоговой аттестации требуют установления соответствия без применения конкретного метода решения: “Какой из графиков обратной пропорциональности принадлежит функции $y = \frac{-1}{x}$? Решите задание методом исключения. Не используйте один и тот же математический прием на однообразном тематическом содержании”.

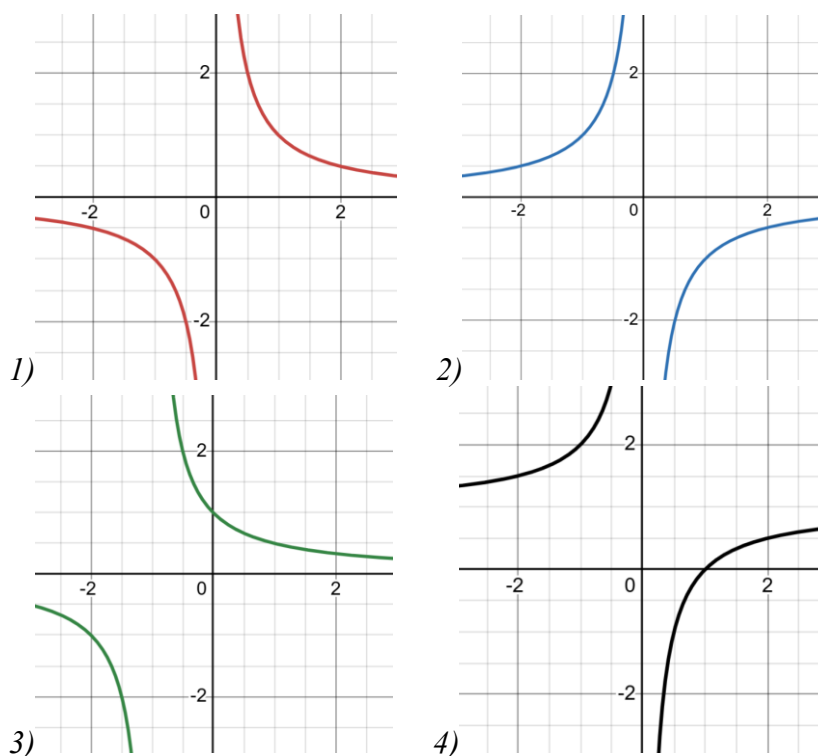


Рис. 1. Графики функций

1. Для начала можно исключить график под номером один, поскольку расположение ветвей гиперболы в первой и третьей четвертях координатной плоскости однозначно указывает на положительное значение коэффициента k в соответствующей функции.

2. Четвёртый график демонстрирует вертикальное смещение, что свидетельствует о присутствии в функции обратной пропорциональности свободного коэффициента или аргумента в числителе. График функции $y = \frac{-1}{x}$ не имеет смещения ни по одной из осей.

3. Подставим координаты одной из точек, принадлежащих третьему графику, например, точки $(1; 0,5)$, в исходное уравнение. $0,5 \neq \frac{-1}{1}$, следовательно, график под номером три не принадлежит функции $y = \frac{-1}{x}$.

Ответ: 2.

Не использовать один и тот же математический приём — это важное методическое требование, которое означает необходимость применения различных подходов при решении задач одного типа. Разнообразие методов — ключевой принцип, помогающий избежать шаблонности мышления и развить умение выстраивать стратегии решения, анализировать преимущества и недостатки каждого метода.

Проанализируем предложенное решение по пунктам:

В первом пункте был исключен неправильный вариант ответа под номером один, “поскольку расположение ветвей гиперболы в первой и третьей четвертях координатной плоскости однозначно указывает на положительное значение коэффициента k в соответствующей функции”. Однако, с точки зрения всесторонней проверки процессуальной стороны решения, следует внести ясность в ответ для графиков, ветви которых могут пересекать ось ординат или/и ось абсцисс (так как их ветви, частично, находятся в первой или третьей координатной четверти), как например график гиперболы под номером три. “Можно ли исключить по этому принципу третий вариант ответа?”.

В рамках второго пункта решения необходимо уделить особое внимание изучению и корректному использованию математической терминологии. Математический тезаурус играет ключевую роль в формировании полноценного понимания предмета. Особый акцент следует сделать на изучении такого понятия, как асимптота.

В третьем пункте решения важно отметить, что выбранная точка не должна принадлежать другим графикам функций из представленных решений, так как координаты двух точек могут совпадать, а сами точки принадлежать нескольким функциям.

Процесс разработки критериев оценивания следует начинать с тщательной подготовки. Необходимо четко определить цель оценивания, проанализировать планируемые результаты и выделить ключевые компетенции, которые подлежат оценке или не оцениваются в конкретном задании.

При формулировке критериев следует придерживаться нескольких основополагающих принципов. Каждый критерий должен быть конкретным, измеримым и напрямую связанным с образовательными целями. Формулировки должны быть понятными для всех участников образовательного процесса, а количество критериев — оптимальным.

Для примера выделим основные критерии оценивания и ключевые умения, требующие дополнительной проверки для критериального задания на метод исключения, рассматриваемого выше:

- 1) логичность и структурированность рассуждений;
- 2) корректное использование математических терминов;
- 3) выделение общих принципов работы с графиками функций;
- 4) выделение общих принципов работы с гиперболами;
- 5) учёт и описание дополнительных факторов, которые могли бы повлиять на решение.

Ключевые умения, требующие дополнительной проверки:

- 1) вычислительные навыки;
- 2) сравнение графиков, в которых модуль коэффициента k отличается;
- 3) работа с областью допустимых значений;
- 4) понимание четности/нечетности, убывания/возрастания, монотонности функции.

Таким образом критериальные задания, основанные на методе исключения, представляют собой эффективный инструмент оценки математических компетенций обучающихся. Их ключевыми преимуществами являются:

- 1) структурированный анализ степени усвоения учебного материала;

- 2) невозможность упрощения алгоритма решения;
- 3) использование различных подходов в процессе поиска решения на однообразном тематическом содержании;
- 4) объективность оценивания;
- 5) развитие умения систематизации информации и построения логических цепочек рассуждений;

6) комплексная и всесторонняя проверка процессуальной стороны решения задания.

Однако, критериальные задания на метод исключения имеют некоторые ограничения и недостатки. Выделим основные из них:

- 1) временные затраты: процесс исключения неправильных ответов вместо прямого выбора очевидно правильного решения приводит к потере большого количества времени;
- 2) ограниченная применимость или неприменимость автоматизированных систем проверки;
- 3) сложность формулировки критериев;
- 4) сложность стандартизации.

Система критериев эффективности применения критериальных заданий на метод исключения должна обеспечивать комплексный подход к оценке эффективности подготовки к ГИА. Итоговая оценка формируется на основе интеграции всех критериев с учетом специфики математики, как предмета, и условий образовательного процесса. Выделим основные из них:

1. Когнитивный критерий отражает способность к выбору оптимального способа исключения, умение применять метод в типовых экзаменационных задачах, понимание математического смысла выполняемых операций.

2. Деятельностный критерий определяет самостоятельность в решении задач, скорость выполнения заданий, грамотность математических записей и точность вычислений.

3. Результативный критерий демонстрирует процент правильно решенных типовых заданий, стабильность результатов при повторном тестировании, динамику улучшения показателей, качество выполнения заданий повышенного уровня, готовность к решению нестандартных задач.

4. Мотивационный критерий отражает степень заинтересованности в изучении метода исключения и активность при решении задач.

5. Диагностический критерий определяет способность задания выявлять пробелы в знаниях, определять типичные ошибки, создавать индивидуальные траектории обучения, прогнозировать результаты ГИА.

Заключение

Подводя итог, эффективность критериальных заданий на метод исключения как средства реализации обратной связи в процессе подготовки к итоговой аттестации по математике подтверждается рядом существенных факторов. Ключевым фактором их результативности выступает поэтапное структурирование заданий, которое обеспечивает систематический мониторинг уровня освоения материала, позволяет оперативно диагностировать пробелы в знаниях обучающихся, а также даёт возможность гибко управлять процессом подготовки к итоговой аттестации с оперативной корректировкой методик преподавания.

Важной особенностью метода выступает его процессуальная направленность: она позволяет не просто фиксировать конечный ответ, но и отслеживать логику рассуждений, выявлять ошибки в алгоритме решения на ранних стадиях и тем самым формировать осознанный подход к выполнению математических задач.

Кроме того, невозможность упрощения алгоритма решения заданий предотвращает механическое заучивание учебного материала и требует освоения всевозможных способов решения. Также к основным преимуществам заданий на метод исключения можно отнести структурированность учебного материала, дифференцированность процесса подготовки, чёткие и понятные всем участникам образовательного процесса критерии оценивания.

Таким образом, интеграция критериальных заданий на метод исключения в процесс подготовки к итоговой аттестации создают комплексную систему, направленную на повышение эффективности реализации обратной связи и качества обучения математике.

Список литературы

- Аскарлова М.А. О системе критериального оценивания в обучении (из наблюдений опыта учителей на практике в школе) // Молодой ученый. 2014. № 20.1 (79.1). С. 34–36.
- Безрукова Г.В. Технология дифференцированного обучения как средство качественной подготовки к итоговой аттестации по математике // Вестник научных конференций. 2020. № 5-2 (57). С. 33–34.
- Евграфов И.Е., Шамгуллина Г.Р., Боровик С.Г. Роль и значение педагогического контроля в управлении образовательным процессом // Проблемы современного педагогического образования. 2019. №. 64-1. С. 102–105.
- Ловянникова В.В., Нихаева Я.М. Принципы и особенности организации новой системы итоговой государственной аттестации выпускников общеобразовательных учреждений // Вестник магистратуры. 2014. № 7(34). Том II. С. 21–23.
- Лялькина А.Т., Червякова Н.М. Процессуальные задачи как средство развития математического мышления // Интеграция образования. №. 2. 1999. С. 37–42.
- Майоров А.Н. Мониторинг в образовании: изд. 3-е, испр. и доп. М: Интеллект-Центр. 2005.
- Муканова Р.Ж., Искакова Г.С. Критериальное оценивание как новый подход оценивания в современной школе // SciencesofEurope. 2022. №. 91-1. С. 52–57.
- Некрасова О.А. Критериальные задачи как средство организации обратной связи в процессе обучения математике младших школьников: дис. ... кандидата педагогических наук: 13.00.02 / Морд. гос. пед. ин-т им. М.Е. Евсевьева. Саранск. 2005.
- Родионов М.А., Чернышов В.П. Содержательно-методические особенности подготовки к ЕГЭ по математике на основе использования критериальных заданий // Учебный эксперимент в образовании. 2024. № 4 (112). С. 109–117.
- Родионов М.А., Дедовец Ж., Чернышов В.П. Возможности реализации процессуальной обратной связи в процессе обучения математике // Современные наукоемкие технологии. 2024. № 10. С. 212–216.
- Родионова В. А. Возможности реализации обратной связи в процессе дистанционного обучения студентов медицинского вуза // Образование и право. 2020. № 9. С. 260–263.
- Ромас В.А., Зверева Л.Г. Формы и методы контроля знаний обучающихся на уроках математики, как средство повышения эффективности // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2020. №. 5-3. С. 155–158.
- Стремоусова Е. Н. Эффективность обратной связи и ее специфика в организации. // Прикладная юридическая психология. №. 2. 2008. С. 75–86.
- Федеральный закон "Об образовании в Российской Федерации" от 29.12.2012 N 273-ФЗ.
- Чернобай Е.В., Холманская М.В. Возможности воздействия на самостоятельность учащихся через организацию обратной связи // Педагогика и психология образования. 2023. № 2. С. 23–43.
- Янковская В.М. Из опыта реализации эффективного контракта в дошкольной образовательной организации // Дошкольная педагогика. 2016. №1(116). С. 54–60.

Информация об авторе

Чернышов Владислав Петрович; аспирант кафедры “Информатика и методика преподавания информатике и математике” по специальности 5.8.2. «Теория и методика обучения и воспитания (математика)»; ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Россия, Пенза, 440026, ул. Красная; д. 40); E-mail: vlad_chernyshov_220199@mail.ru; ORCID ID: 0009-0009-7834-370

CRITERION TASKS FOR THE EXCLUSION METHOD AS A MEANS OF IMPLEMENTING EFFECTIVE FEEDBACK IN PREPARATION FOR FINAL CERTIFICATION IN MATHEMATICS

Chernyshov V. P. | Penza State University
post-graduate student

Abstract. The work is devoted to the study of the effectiveness of using criterion tasks for the elimination method in the process of preparing students for the final certification in mathematics. The relevance of the study is determined by the constantly changing standards and requirements of the modern education system. The introduction of the work aims to reveal the significance of feedback in the process of preparing for the state final certification, as well as the need to integrate more effective means and tools of preparation into the educational process. The analysis of the literature has revealed the problems of controlling the procedural aspects of solving the tasks of the state final certification and the main ways to solve them. The research methodology includes a comprehensive analysis of the criterion-based task on the elimination method, considering its structure and possible solutions. Additionally, the study identifies the principles of formulating evaluation criteria and structuring tasks. The conclusion highlights the advantages and importance of integrating criterion-based tasks on the elimination method into the process of preparing for the final mathematics examination.

Keywords: feedback, criterion assignment, learning tool, exclusion method, final assessment

For citation: Chernyshov V. P. (2026). Criterion tasks for the exclusion method as a means of implementing effective feedback in preparation for final certification in mathematics. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2 (42), 36–44. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-36-44

Copyright: © Chernyshov V. P. (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Askarova, M. A. (2014). On the system of criterion assessment in teaching (from observations of teachers' experience in practice at school). *Molodoy ucheniy*, 20.1(79.1), 34-36. (In Russ., abstract in Eng.)
- Bezrukova, G. V. (2020). Technology of differentiated education as a means of high-quality preparation for final certification in mathematics. *Vestnik nauchnykh konferentsii*, 5-2(57), 33-34. (In Russ., abstract in Eng.)

- Chernobai, E. V., Kholmanskaya, M. V. (2023). The possibilities of influencing students' independence through the organization of feedback. *Pedagogika i psikhologiya obrazovaniya*, 2, 23-43. (In Russ., abstract in Eng.)
- Evgrafov, I. E., Shamgullina, G. R., Borovik, S. G. (2019). The role and importance of pedagogical control in the management of the educational process. *Problemy sovremennogo pedagogicheskogo obrazovaniya*, 64-1, 102-105. (In Russ., abstract in Eng.)
- Federal Law (2012). "On Education in the Russian Federation" dated December 29. 2012 N 273-FZ.
- Lovyannikova, V. V., Nihaeva, Ya. M. (2014). Principles and features of the organization of the new system of final state certification of graduates of educational institutions. *Vestnik magistratury*, 7(34), 21-23. (In Russ., abstract in Eng.)
- Lyalkina, A. T., Chervyakova, N. M. (1999). Procedural tasks as a means of developing mathematical thinking. *Integratsiya obrazovaniya*, 2, 37-42. (In Russ., abstract in Eng.)
- Mayorov, A. N. (2005). Monitoring v obrazovanii: izd. 3-e. ispr. i dop. Moscow: Intellect-Center. (In Russ., abstract in Eng.)
- Mukanova, R. J., Iskakova, G. S. (2022). Criterion assessment as a new assessment approach in modern schools. *Sciences of Europe*, 91-1, 52-57. (In Russ., abstract in Eng.)
- Nekrasova, O. A. (2005). Kriterialnyye zadachi kak sredstvo organizatsii obratnoy svyazi v protsesse obucheniya matematike mladshikh shkolnikov [Ph.D. Dissertation], Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev, Saransk, Russia.
- Rodionov, M. A., Chernyshov, V. P. (2024). Substantive and methodological features of preparation for the Unified State Exam in mathematics based on the use of criterion tasks. *Uchebnyi eksperiment v obrazovanii*, 4(112), 109-117. (In Russ., abstract in Eng.)
- Rodionov, M. A., Dedovets, J., Chernyshov, V. P. (2024). Possibilities of implementing procedural feedback in the process of teaching mathematics. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, 10, 212-216. (In Russ., abstract in Eng.)
- Rodionova, V. A. (2020). Possibilities of implementing feedback in the process of distance learning for medical university students. *Obrazovanie i pravo*, 9, 260-263. (In Russ., abstract in Eng.)
- Romas, V. A., Zvereva, L. G. (2020). Forms and methods of control of students' knowledge in mathematics lessons as a means of increasing efficiency. *Mezhdunarodnyi zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 5-3, 155-158. (In Russ., abstract in Eng.)
- Stremousova, E. N. (2008). The effectiveness of feedback and its specifics in the organization. *Prikladnaya yuridicheskaya psikhologiya*, 2, 75-86. (In Russ., abstract in Eng.)
- Yankovskaya, V. M. (2016). From the experience of implementing an effective contract in a preschool educational organization. *Doshkolnaya pedagogika*, 1(116), 54-60 (In Russ., abstract in Eng.)

Information about the author

Vladislav P. Chernyshov; post-graduate student; Department of Computer Science and Methods of Teaching Computer Science and Mathematics; specialty 5.8.2. Theory and Methods of Teaching and Upbringing (Mathematics); Penza State University (440026, Russia, Penza, Krasnaya str., 40); E-mail: vlad_chernyshov_220199@mail.ru; ORCID: 0009-0009-7834-370

Статья поступила в редакцию 09.02.2026
Принята к публикации 25.03.2026
Статья опубликована 19.06.2026

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-45-71

УДК
378.147:004

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ В ОБЛАСТИ АНАЛИЗА ОДНОМЕРНЫХ ДАННЫХ С ПРИМЕНЕНИЕМ РЕДАКТОРА ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ MICROSOFT EXCEL

Богун Виталий Викторович
к.п.н., доцент

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского; Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Ярославский филиал; Международный университет бизнеса и новых технологий (МУБиНТ), г. Ярославль

Аннотация. При реализации научно-исследовательской деятельности студентами вузов различных направлений подготовки в процессе выполнения проектной деятельности является актуальным вопрос о проведении анализа одномерных или многомерных получаемых массивов числовых данных. Технологии анализа данных с точки зрения выполнения необходимых вычислительных алгоритмов базируются на совокупном использовании математических объектов из определённых разделов высшей математики, линейной алгебры и математической статистики. В рамках данной статьи показаны основные аспекты реализации анализа одномерных массивов числовых данных с точки зрения исследования значений одного признака или атрибута исследуемой выборки объектов с акцентом на расчётные параметры, нахождения значения которых основаны на применении итеративных алгоритмов с интересной математической подоплекой. Представлена реализация описанных математических расчётов с применением редактора электронных таблиц Microsoft Excel с корректным отображением числовых значений параметров исходных данных, промежуточных и итоговых результатов расчётов для наглядного отражения динамических аспектов поэтапного решения задачи исследования одномерных числовых данных. Применение обозначенного цифрового инструмента в представленном виде будет способствовать формированию математических и информационных компетенций студентов вуза в ракурсе анализа одномерных массивов данных с точки зрения актуализации полноценной системы знаний, умений и навыков студентов вузов.

Ключевые слова: научно-исследовательская деятельность студентов вузов, анализ данных, методы математической статистики, информационно-коммуникационные технологии, редактор электронных таблиц Microsoft Excel

Для цитирования: Богун В.В. Формирование профессиональных компетенций студентов вузов в области анализа одномерных данных с применением

редактора электронных таблиц Microsoft Excel // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 2 (42). С. 45–71. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-45-71

Права: © В.В. Богун (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Анализ одномерных данных является базовым элементом статистической подготовки студентов высшей школы независимо от направления обучения (экономика, инженерия, педагогика, IT) (Тестов, 2024; Тестов, 2025). На практике исследователь чаще всего сталкивается с выборкой числовых значений одного признака – будь то успеваемость студентов, время выполнения операции, размер детали или цена акции. Ключевая задача – не просто рассчитать «среднюю температуру по больнице», а понять логику получения каждой статистической характеристики, научиться связывать исходные данные с результатом через прозрачную последовательность действий.

Для данных целей редактор электронных таблиц Microsoft Excel является оптимальным инструментом обучения. Указанный программный продукт обеспечивает наглядность промежуточных вычислений, позволяет реализовать как «ручной» итеративный расчёт, так и автоматизированный (встроенными функциями), а также визуализировать распределение данных. Однако типичная ошибка многих пособий – использование редактора электронных таблиц Microsoft Excel только как «чёрного ящика» (вставил данные, нажал =СРЗНАЧ() – получил результат). Студент не видит причинно-следственных связей.

Целью настоящей статьи является разработка и обоснование методики формирования профессиональных компетенций студентов вузов в области анализа одномерных данных, реализуемой через три взаимосвязанных уровня представления учебного материала: *аналитический* (с выводом формул и доказательством ключевых свойств), *числовой итеративный* (пошаговое накопление сумм в редакторе электронных таблиц Microsoft Excel без использования встроенных статистических функций, эмулирующее циклический вычислительный процесс) и *агрегированный* (применение штатных функций табличного редактора для верификации результатов).

Такой подход, в отличие от абстрактного объектно-ориентированного моделирования, напрямую формирует у обучающихся вычислительное мышление, понимание внутренней логики статистических алгоритмов и доверие к инструменту, что в совокупности обеспечивает осознанное применение редактора электронных таблиц Microsoft Excel для анализа одномерных выборок данных на всех этапах научно-исследовательской деятельности (Богун, 2026; Мхитарян, 2025; Дворяткина, 2023; Щукина, 2023).

В данной научной статье в наглядном виде на теоретическом и практическом уровнях представлена реализация вычислительных алгоритмов для получения представляющих с математической точки зрения интерес значений расчётных параметров при реализации анализа одномерного массива числовых данных, представляющих по своей сути значения признака или атрибута исследуемой совокупности объектов в рамках изучаемого процесса или явления. Необходимо отметить, что при нахождении итоговых числовых значений рассматриваемых в статье расчётных параметров на основе применения редактора электронных таблиц Microsoft Excel осуществлялось последовательное наращивание промежуточных значений соответствующих расчётных компонентов для визуального представления реализуемого вычислительного процесса в динамике для полноценного понимания учащимися алгоритмических основ обработки числовых массивов одномерных данных как минимум на уровне реализации агрегатных функций, базовые из которых ориентированы на нахождение числовых значений количества, суммы и произведения элементов массива.

Основная часть

Пусть в рамках проводимого исследования при изучении количественного признака X из генеральной совокупности данных извлечена *одномерная выборка данных* с вариантами x_1, x_2, \dots, x_n определённого объёма n , при этом значения могут быть представлены как в виде одинаковых, так и в виде различных чисел, отражающих количественные значения одного исследуемого параметра или признака для данных объектов выборки, что отражено в таблице 1 ниже в виде фрагмента исследуемых данных.

Таблица 1. Задание одномерной выборки данных

Порядковый номер	Обозначение параметра	Значение параметра
1	x_1	51
2	x_2	43
...
$n-1$	x_{n-1}	59
n	x_n	43

При реализации последующих процессов сортировки и группировки имеющейся одномерной выборки данных получим *сгруппированный вариационный ряд*, отражающий соответствие между двумя конечными последовательностями чисел, содержащими по k элементов каждая, в рамках первой из которых в порядке возрастания указываются различные варианты значений x_{vj} , тогда как для второй последовательности указываются частоты или количества повторов данных значений f_{vj} , что отражено в таблице 2 ниже, в рамках которой в качестве дополнительной компоненты также указывается объем выборки сгруппированного вариационного ряда, выражаемый через сумму частот для всех различных вариантов данных:

$$n = \sum_{j=1}^m f_{vj} = f_{v1} + f_{v2} + \dots + f_{v(m-1)} + f_{vm}$$

Таблица 2. Задание дополненного сгруппированного вариационного ряда

Обозначения параметров						
x_{vj}	x_{v1}	x_{v2}	...	$x_{v(m-1)}$	x_{vm}	n
f_{vj}	f_{v1}	f_{v2}	...	$f_{v(m-1)}$	f_{vm}	$\sum_{j=1}^m f_{vj}$
Числовые значения параметров						
x_{vj}	38	43	...	54	59	n
f_{vj}	4	5	...	4	3	23

Анализ одномерной выборки данных (сгруппированного вариационного ряда), который также называется описательной статистикой, подразумевает определение числовых значений определённого количества статистических параметров для данной выборки (Богун, 2026; Кремер, 2019; Смирнов, 2020).

В данной статье основной упор сделан на те показатели положения, характеризующие средние значения, и вариации, характеризующие отклонения от средних значений, которые изначально базируются на реализации итеративного подхода с точки зрения нахождения значений агрегатных функций, алгоритмически реализуемого также и в рамках применения рекурсивного подхода (Богун, 2025), к нахождению числовых значений, суть которых заключается в получении новых значений расчётных параметров рассматриваемого процесса

на основании имеющихся одного или нескольких предыдущих значений данных параметров согласно заранее определённом вычислительному алгоритму (Мхитарян, 2025; Яковлев, 2025; Шитакова, 2025). Нахождение итогового значения расчётного параметра исследуемой одномерной выборки данных или сгруппированного вариационного ряда с применением итеративного, а также, на теоретическом уровне, в противовес ему, рекурсивного, подходов можно осуществить за определённое количество заранее известного количества циклически повторяющихся итераций.

Рассмотрим реализацию анализа одномерной выборки данных с математической (аналитическое и числовое представление) и информационной точек зрения (применение редактора электронных таблиц Microsoft Excel). На рис. 1 представлена исследуемая одномерная выборка данных и соответствующий сгруппированный вариационный ряд с точки зрения отражения числовых значений атрибута для отдельно взятой совокупности объектов.

Выделим следующие основные **характеристики (показатели) положения (меры центральной тенденции)** для одномерной выборки данных и соответствующего ей сгруппированного вариационного ряда с точки зрения реализации последовательного суммирования значений параметров исходных данных в рамках практической реализации изначально итеративного, а в теории и рекурсивного, подходов:

1. Выборочное среднее (выборочный начальный момент первого порядка) одномерной выборки объёмом n (соответствующего сгруппированного вариационного ряда), обозначается \bar{X} , значение параметра определяется как среднее арифметическое всех представленных в рамках выборки значений вариантов (равняется отношению суммы произведений значений вариантов x_{vj} на их частоты f_{vj} к объёму выборки n), при этом в квадратных скобках указаны законы изменения значения параметра согласно реализации последовательного агрегирования данных на основе применения итеративного подхода (без учёта деления на объём выборки, которое выполняется уже в конце всех итераций):

$$\bar{X} = \bar{\alpha}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

$$[\bar{X}_s = \bar{X}_{s-1} + x_s]$$

$$\left(\bar{X} = \bar{\alpha}_1 = \frac{\sum_{j=1}^m x_{vj} \cdot f_{vj}}{n} = \frac{x_{v1} \cdot f_{v1} + x_{v2} \cdot f_{v2} + \dots + x_{v(m-1)} \cdot f_{v(m-1)} + x_{vm} \cdot f_{vm}}{n} \right)$$

$$([\bar{X}_{vt} = \bar{X}_{v(t-1)} + x_{vt} \cdot f_{vt}])$$

Расчёт значения выборочного среднего или выборочного начального момента первого порядка для исходной одномерной выборки данных, согласно обозначенной формулировке, имеет следующую реализацию с представлением результата расчётов в виде дроби:

$$\bar{X} = \bar{\alpha}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{23} x_i}{23} = \frac{51 + 43 + \dots + 59 + 43}{23} = \frac{1117}{23}.$$

Тогда расчёт значения выборочного среднего или выборочного начального момента первого порядка для получаемого из исходной выборки одномерных данных сгруппированного вариационного ряда осуществляется согласно следующей цепочке равенств аналогично с представлением результата расчётов в виде дроби:

$$\bar{X} = \bar{\alpha}_1 = \frac{\sum_{j=1}^5 x_{vj} \cdot f_{vj}}{23} = \frac{38 \cdot 4 + 43 \cdot 5 + \dots + 54 \cdot 4 + 59 \cdot 3}{23} =$$

$$= \frac{152 + 215 + \dots + 216 + 177}{23} = \frac{1117}{23}.$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Исходные данные для описательной статистики одномерной выборки данных						
2	Наименование параметра	Обозначение	Значение				
3	Количество объектов одномерных данных (объем выборки)	n_0	23				
4	Наименование параметра	Вариант параметра (Одмерная выборка данных)	Вариант параметра (Сгруппированный вариационный ряд)	Частота варианта параметра (Сгруппированный вариационный ряд)			
5	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
6	1	x_1	51	xv_1	38	fv_1	4
7	2	x_2	43	xv_2	43	fv_2	5
8	3	x_3	59	xv_3	51	fv_3	7
9	4	x_4	51	xv_4	54	fv_4	4
10	5	x_5	51	xv_5	59	fv_5	3
11	6	x_6	38				
12	7	x_7	54				
13	8	x_8	43				
14	9	x_9	51				
15	10	x_{10}	38				
16	11	x_{11}	51				
17	12	x_{12}	43				
18	13	x_{13}	38				
19	14	x_{14}	38				
20	15	x_{15}	43				
21	16	x_{16}	54				
22	17	x_{17}	51				
23	18	x_{18}	59				
24	19	x_{19}	54				
25	20	x_{20}	51				
26	21	x_{21}	54				
27	22	x_{22}	59				
28	23	x_{23}	43				
29	Количество объектов одномерных данных (объем выборки)	n_0	23			n_0	23

Рис. 1. Представление значений атрибута объектов для одномерной выборки данных (сгруппированного вариационного ряда)

Важно отметить, что для организации полноценного образовательного процесса, подразумевающего выполнение статистического анализа одномерных массивов данных, с целью формирования компетенции «понимание алгоритма» студенты должны пройти этапы последовательного практически «ручного» накопления сумм соответствующих расчётных компонентов с последующим нахождением итогового значения расчётного параметра, на основе реализации «обычных» элементарных формул с использованием механизмов относительной и абсолютной адресации ячеек в рамках редактора электронных таблиц Microsoft Excel.

На рис. 2 представлена детализация расчётов выборочного среднего или начального момента первого порядка для исследуемой одномерной выборки данных и соответствующего ей сгруппированного вариационного ряда с применением редактора электронных таблиц Microsoft Excel с точки зрения реализации последовательного суммирования атомарных или единичных значений параметров исходных данных в рамках практической реализации изначально итеративного, а в теории и рекурсивного, подходов к последовательному получению итогового значения данного параметра без учёта деления на объем выборки и отражения числового результата расчётов с учётом деления на объём выборки в виде десятичного числа.

На рис. 3 в наглядном виде представлены формулы, которые, во-первых, применяются для реализации последовательного наращивания компонентов итогового значения выборочного среднего или начального момента первого порядка для исследуемой одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда, а, во-вторых, соотносят полученное итоговое расчётное значение исследуемого параметра с двумя способами получения числового значения данного параметра с использованием встроенных в редактор электронных таблиц Microsoft Excel соответствующих отражённых на данном рисунке функций.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

	A	B	C	D	E
30	Реализация расчетов параметров для одномерной выборки данных				
31	Характеристики (показатели) положения (меры центральной тенденции) для одномерной выборки данных				
32	Выборочное среднее (Начальный момент первого порядка) для одномерной выборки данных				
33	Наименование параметра	Наращивание компонентов выборочного среднего (Одномерная выборка данных)		Наращивание компонентов выборочного среднего (Сгруппированный вариационный ряд)	
34	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
35	1	X_1	51	Xv_1	152
36	2	X_2	94	Xv_2	367
37	3	X_3	153	Xv_3	724
38	4	X_4	204	Xv_4	940
39	5	X_5	255	Xv_5	1117
40	6	X_6	293		
41	7	X_7	347		
42	8	X_8	390		
43	9	X_9	441		
44	10	X_{10}	479		
45	11	X_{11}	530		
46	12	X_{12}	573		
47	13	X_{13}	611		
48	14	X_{14}	649		
49	15	X_{15}	692		
50	16	X_{16}	746		
51	17	X_{17}	797		
52	18	X_{18}	856		
53	19	X_{19}	910		
54	20	X_{20}	961		
55	21	X_{21}	1015		
56	22	X_{22}	1074		
57	23	X_{23}	1117		
58	Выборочное среднее для одномерной выборки данных (до деления)	X_0	1117	Xv_0	1117
59	Выборочное среднее для одномерной выборки данных (после деления)	X	48,56521739	Xv	48,56521739
60	Выборочное среднее для одномерной выборки данных (Excel) Вариант 1	X	48,56521739	Xv	48,56521739
61	Выборочное среднее для одномерной выборки данных (Excel) Вариант 2	X	48,56521739		

Рис. 2. Детализация расчётов выборочного среднего для одномерной выборки данных

	A	B	C
62	Адрес ячейки формулы	Формула	
63	Последовательные расчеты для одномерной выборки данных		
64	Ячейка C35	=C6	
65	Ячейка C36	=C35+C7	
66	Ячейка C57	=C56+C28	
67	Ячейка C58	=C57	
68	Ячейка C59	=C58/C3	
69	Последовательные расчеты для сгруппированного вариационного ряда		
70	Ячейка E35	=E6*G6	
71	Ячейка E36	=E35+E7*G7	
72	Ячейка E39	=E38+E10*G10	
73	Ячейка E58	=E39	
74	Ячейка E59	=E58/C3	
75	Применение функций редактора Excel для выборочного среднего		
76	Ячейка C60	=СУММ(C6:C28)/C3	
77	Ячейка E60	=СУММПРОИЗВ(E6:E10;G6:G10)/C3	
78	Ячейка C61	=СРЗНАЧ(C6:C28)	

Рис. 3. Используемые формулы и функции редактора Microsoft Excel с целью определения значения выборочного среднего для одномерной выборки данных

2. Выборочное среднее квадратов (выборочный начальный момент второго порядка) одномерной выборки объёмом n (соответствующего сгруппированного вариационного ряда), обозначается $\overline{X^2}$, значение параметра определяется как среднее арифметическое квадратов всех представленных в рамках выборки значений вариантов (равняется отношению суммы произведений значений квадратов вариантов x_{vj} на их частоты f_{vj} к объёму выборки n), при этом по аналогии с предыдущим расчётным параметром в квадратных скобках указаны законы изменения значения параметра согласно реализации последовательного агрегирования данных на основе применения итеративного подхода (без учёта деления на объём выборки, которое выполняется уже в конце всех итераций):

$$\overline{X^2} = \overline{\alpha_2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2}{n}$$

$$\left(\overline{X^2} = \overline{\alpha_2} = \frac{\sum_{j=1}^m x_{vj}^2 \cdot f_{vj}}{n} = \frac{x_{v1}^2 \cdot f_{v1} + x_{v2}^2 \cdot f_{v2} + \dots + x_{v(m-1)}^2 \cdot f_{v(m-1)} + x_{vm}^2 \cdot f_{vm}}{n} \right)$$

$$\left(\left[\overline{X_s} = \overline{X_{s-1}} + x_s^2 \right] \right)$$

$$\left(\left[\overline{X_{vt}} = \overline{X_{v(t-1)}} + x_{vt}^2 \cdot f_{vt} \right] \right)$$

Расчёт значения выборочного среднего квадратов или выборочного начального момента второго порядка для исходной одномерной выборки данных, согласно обозначенной формулировке, имеет следующую реализацию с представлением итогового результата расчётов в виде дроби:

$$\overline{X^2} = \overline{\alpha_2} = \frac{\sum_{i=1}^{23} x_i^2}{23} = \frac{51^2 + 43^2 + \dots + 59^2 + 43^2}{23} = \frac{2601 + 1849 + \dots + 3481 + 1849}{23} = \frac{55335}{23}.$$

Тогда расчёт значения выборочного среднего квадратов или выборочного начального момента второго порядка для получаемого из исходной выборки одномерных данных сгруппированного вариационного ряда осуществляется согласно следующей цепочке равенств аналогично с представлением результата расчётов в виде дроби:

$$\overline{X^2} = \overline{\alpha_2} = \frac{\sum_{j=1}^5 x_{vj}^2 \cdot f_{vj}}{23} = \frac{38^2 \cdot 4 + 43^2 \cdot 5 + \dots + 54^2 \cdot 4 + 59^2 \cdot 3}{23} =$$

$$= \frac{1444 \cdot 4 + 1849 \cdot 5 + \dots + 2916 \cdot 4 + 3481 \cdot 3}{23} =$$

$$= \frac{5776 + 9245 + \dots + 11664 + 10443}{23} = \frac{55335}{23}.$$

На рис. 4 представлена детализация расчётов выборочного среднего квадратов или начального момента второго порядка для исследуемой одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда с применением редактора электронных таблиц Microsoft Excel на основе реализации циклического алгоритма в рамках последовательного нахождения значения соответствующего расчётного параметра с точки зрения применения необходимой агрегатной функции, изначально применяемой для исследуемого одномерного массива данных, через призму практической реализации изначально итеративного, а в теории и рекурсивного, подходов к последовательному получению итогового значения данного параметра без учёта деления на объём выборки и отражения числового результата расчётов с учётом деления на объём выборки в виде десятичного числа.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

	A	B	C	D	E
79	Выборочное среднее квадратов (Начальный момент второго порядка) для одномерной выборки данных				
80	Наименование параметра	Наращивание компонентов выборочного среднего квадратов (Одномерная выборка данных)		Наращивание компонентов выборочного среднего квадратов (Сгруппированный вариационный ряд)	
81	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
82	1	X^2_1	2601	Xv^2_1	5776
83	2	X^2_2	4450	Xv^2_2	15021
84	3	X^2_3	7931	Xv^2_3	33228
85	4	X^2_4	10532	Xv^2_4	44892
86	5	X^2_5	13133	Xv^2_5	55335
87	6	X^2_6	14577		
88	7	X^2_7	17493		
89	8	X^2_8	19342		
90	9	X^2_9	21943		
91	10	X^2_{10}	23387		
92	11	X^2_{11}	25988		
93	12	X^2_{12}	27837		
94	13	X^2_{13}	29281		
95	14	X^2_{14}	30725		
96	15	X^2_{15}	32574		
97	16	X^2_{16}	35490		
98	17	X^2_{17}	38091		
99	18	X^2_{18}	41572		
100	19	X^2_{19}	44488		
101	20	X^2_{20}	47089		
102	21	X^2_{21}	50005		
103	22	X^2_{22}	53486		
104	23	X^2_{23}	55335		
105	Выборочное среднее квадратов для одномерной выборки данных (до деления)	X^2_0	55335	Xv^2_0	55335
106	Выборочное среднее квадратов для одномерной выборки данных (после деления)	X^2	2405,869565	Xv^2	2405,869565
107	Выборочное среднее квадратов для одномерной выборки данных (Excel) Вариант 1	X^2	2405,869565	Xv^2	2405,869565
108	Выборочное среднее квадратов для одномерной выборки данных (Excel) Вариант 2	X^2	2405,869565		

Рис. 4. Детализация расчётов выборочного среднего квадратов для одномерной выборки данных

На рис. 5 в наглядном виде представлены формулы, которые, во-первых, применяются для реализации последовательного наращивания компонентов итогового значения выборочного среднего квадратов или начального момента второго порядка для исследуемой одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда, а, во-вторых, соотносят полученное итоговое расчётное значение исследуемого параметра с двумя способами получения числового значения данного параметра с использованием встроенных в редактор электронных таблиц Microsoft Excel соответствующих отражённых на данном рисунке функций.

Помимо указанных расчётных параметров или характеристик (показателей) положения (меры центральной тенденции) для одномерной выборки и соответствующего ей сгруппированного вариационного ряда также можно выделить **выборочную моду и медиану**, которые выражаются как реально взятые из выборки значения или совокупность значений параметра или признака исследуемой конечной совокупности объектов, наиболее часто повторяющееся в выборке и характеризующее положения центральных объектов в исходной выборке данных соответственно, однако алгоритмы нахождения значений данных расчётных параметров не подразумевает полноценную реализацию последовательного наращивания итогового или результирующего значения на основе применения изначально итеративного, а в теории и рекурсивного, подходов, поэтому данные параметры не рассматриваются в данной статье.

	А	В	С
109	Адрес ячейки формулы		Формула
110	Последовательные расчеты для одномерной выборки данных		
111	Ячейка С82	=С6^2	
112	Ячейка С83	=С82+С7^2	
113	Ячейка С104	=С103+С28^2	
114	Ячейка С105	=С104	
115	Ячейка С106	=С105/С3	
116	Последовательные расчеты для сгруппированного вариационного ряда		
117	Ячейка Е82	=Е6^2*G6	
118	Ячейка Е83	=Е82+Е7^2*G7	
119	Ячейка Е86	=Е85+Е10^2*G10	
120	Ячейка Е105	=Е86	
121	Ячейка Е106	=Е105/С3	
122	Применение функций редактора Excel для выборочного среднего квадратов		
123	Ячейка С107	=СУММКВ(С6:С28)/С3	
124	Ячейка Е107	=СУММПРОИЗВ(Е6:Е10^2;G6:G10)/С3	
125	Ячейка С108	=СУММКВ(С6:С28)/С3	

Рис. 5. Используемые формулы и функции редактора Microsoft Excel с целью определения значения выборочного среднего квадратов для одномерной выборки данных

Выделим следующие основные **характеристики (показатели) вариации (меры изменчивости)** для одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда, которые по аналогии с обозначенными выше параметрами среднего значения подразумевают последовательное суммирование значений параметров исходных данных в рамках практической реализации изначально итеративного, а в теории и рекурсивного, подходов:

1. Выборочное условное линейное отклонение (выборочный центральный момент первого порядка) выборки объемом n (соответствующего сгруппированного вариационного ряда), обозначается \overline{d}_0 , значение параметра определяется как среднее арифметическое значений всех отклонений представленных в рамках выборки вариантов от значения выборочного среднего (равняется отношению значения суммы произведений разностей между значениями вариантов и значением выборочного среднего на их частоты к объёму выборки) и данное значение равно нулю, при этом по аналогии с предыдущим расчётным параметром в квадратных скобках указаны законы изменения значения параметра согласно реализации последовательного агрегирования данных на основе применения итеративного подхода (без учёта деления на объем выборки, которое выполняется уже в конце всех итераций):

$$\begin{aligned} \overline{d}_0 &= \overline{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{X})}{n} = \frac{(x_1 - \overline{X}) + (x_2 - \overline{X}) + \dots + (x_{n-1} - \overline{X}) + (x_n - \overline{X})}{n} = \\ &= \frac{x_1 - \overline{X} + x_2 - \overline{X} + \dots + x_{n-1} - \overline{X} + x_n - \overline{X}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n}{n} - \overline{X} = 0. \end{aligned}$$

$$[\overline{d}_{0s} = \overline{d}_{0(s-1)} + (x_s - \overline{X})]$$

$$\left(\begin{aligned} \overline{d_0} = \overline{\mu_1} &= \frac{\sum_{j=1}^m (x_{vj} - \bar{X}) \cdot f_{vj}}{n} = \\ &= \frac{(x_{v1} - \bar{X}) \cdot f_{v1} + (x_{v2} - \bar{X}) \cdot f_{v2} + \dots + (x_{v(m-1)} - \bar{X}) \cdot f_{v(m-1)} + (x_{vm} - \bar{X}) \cdot f_{vm}}{n} = \\ &= \frac{x_{v1} \cdot f_{v1} + x_{v2} \cdot f_{v2} + \dots + x_{v(m-1)} \cdot f_{v(m-1)} + x_{vm} \cdot f_{vm} - \bar{X} \cdot (f_{v1} + f_{v2} + \dots + f_{v(m-1)} + f_{vm})}{n} = \\ &= \frac{x_{v1} \cdot f_{v1} + x_{v2} \cdot f_{v2} + \dots + x_{v(m-1)} \cdot f_{v(m-1)} + x_{vm} \cdot f_{vm}}{n} - \bar{X} = 0 \end{aligned} \right)$$

$$[\overline{d_{0vt}} = \overline{d_{0v(t-1)}} + (x_{vt} - \bar{X}) \cdot f_{vt}]$$

Необходимо отметить, что для получения минимального значения суммарного отклонения от выборочного среднего, в виде выборочного условного линейного отклонения (выборочного центрального момента первого порядка) с точки зрения рассматриваемой исходной функции, отражающей данную сумму, необходимо наличие равенства нулю первой производной данной функции, однако в силу равенства нулю исходной суммы компонентов данный аспект не имеет смысла рассматривать в контексте исследуемой одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда.

Расчёт значения выборочного условного линейного отклонения или выборочного центрального момента первого порядка для исходной одномерной выборки данных, согласно обозначенной формулировке, имеет следующую реализацию с представлением результата расчётов в виде дроби:

$$\begin{aligned} \overline{d_0} = \overline{\mu_1} &= \frac{\sum_{i=1}^{23} (x_i - \bar{X})}{23} = \frac{\left(51 - \frac{1117}{23}\right) + \left(43 - \frac{1117}{23}\right) + \dots + \left(59 - \frac{1117}{23}\right) + \left(43 - \frac{1117}{23}\right)}{23} = \\ &= \frac{(51 \cdot 23 - 1117) + (43 \cdot 23 - 1117) + \dots + (59 \cdot 23 - 1117) + (43 \cdot 23 - 1117)}{23 \cdot 23} = \\ &= \frac{(51 \cdot 23 + 43 \cdot 23 + \dots + 59 \cdot 23 + 43 \cdot 23) - 1117 \cdot 23}{23 \cdot 23} = \\ &= \frac{(51 + 43 + \dots + 59 + 43) \cdot 23 - 1117 \cdot 23}{23 \cdot 23} = \frac{1117 \cdot 23 - 1117 \cdot 23}{23 \cdot 23} = 0. \end{aligned}$$

Тогда расчёт значения выборочного условного линейного отклонения или выборочного центрального момента первого порядка для получаемого из исходной выборки одномерных данных сгруппированного вариационного ряда осуществляется согласно следующей цепочке равенств аналогично с представлением результата расчётов в виде дроби:

$$\begin{aligned} \overline{d_0} = \overline{\mu_1} &= \frac{\sum_{j=1}^5 (x_{vj} - \bar{X}) \cdot f_{vj}}{23} = \\ &= \frac{\left(38 - \frac{1117}{23}\right) \cdot 4 + \left(43 - \frac{1117}{23}\right) \cdot 5 + \dots + \left(54 - \frac{1117}{23}\right) \cdot 4 + \left(59 - \frac{1117}{23}\right) \cdot 3}{23} = \\ &= \frac{(38 \cdot 23 - 1117) \cdot 4 + (43 \cdot 23 - 1117) \cdot 5 + \dots + (54 \cdot 23 - 1117) \cdot 4 + (59 \cdot 23 - 1117) \cdot 3}{23 \cdot 23} = \\ &= \frac{(38 \cdot 23 \cdot 4 + 43 \cdot 23 \cdot 5 + \dots + 54 \cdot 23 \cdot 4 + 59 \cdot 23 \cdot 3) - 1117 \cdot (4 + 3 + \dots + 5 + 6)}{23 \cdot 23} = \\ &= \frac{(38 \cdot 4 + 43 \cdot 5 + \dots + 54 \cdot 4 + 59 \cdot 3) \cdot 23 - 1117 \cdot 23}{23 \cdot 23} = \frac{1117 \cdot 23 - 1117 \cdot 23}{23 \cdot 23} = 0. \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что, несмотря на очевидность получения нулевого значения данного расчётного параметра, его реализация в рамках проводимого статистического анализа одномерной выборки данных позволяет студентам наглядно увидеть механизм проверки предварительно найденного значения выборочного среднего, то есть наглядно продемон-

стрировать причинно-следственную связь между выборочным средним и выборочным условным линейным отклонением, что является важным образовательным моментом с точки зрения решения целого комплекса аналогичных задач в рамках не только анализа данных, но и других разделов математики.

На рис. 6 ниже представлена детализация расчётов выборочного условного линейного отклонения или выборочного центрального момента первого порядка для исследуемой одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда с применением редактора электронных таблиц Microsoft Excel на основе аналогичной реализации циклического алгоритма в рамках последовательного нахождения значения соответствующего расчётного параметра с точки зрения применения необходимой агрегатной функции, изначально применяемой для исследуемого одномерного массива данных, через призму практической реализации изначально итеративного, а в теории и рекурсивного, подходов к последовательному получению итогового значения данного параметра без учёта деления на объем выборки и отражения числового результата расчётов с учётом деления на объем выборки в виде десятичного числа.

На рис. 7 в наглядном виде представлены формулы, которые, во-первых, применяются для реализации последовательного наращивания компонентов итогового значения выборочного условного линейного отклонения или выборочного центрального момента первого порядка для исследуемой одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда, а, во-вторых, соотносят полученное итоговое расчётное значение исследуемого параметра с двумя способами получения числового значения данного параметра с использованием встроенных в редактор электронных таблиц соответствующих отражённых на данном рисунке функций.

2. Выборочное среднее линейное отклонение (выборочный центральный момент первого порядка по абсолютным значениям) выборки объёмом n (соответствующего сгруппированного вариационного ряда), обозначается \bar{d} , значение параметра определяется как среднее арифметическое значений модулей всех отклонений представленных в рамках выборки вариантов от значения выборочного среднего (равняется отношению значения суммы произведений модулей разностей между значениями вариантов и значением выборочного среднего на их частоты к объёму выборки), при этом по аналогии с предыдущим расчётным параметром в квадратных скобках указаны законы изменения значения параметра согласно реализации последовательного агрегирования данных на основе применения итеративного подхода (без учёта деления на объем выборки, которое выполняется в конце всех итераций):

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}|}{n} = \frac{|x_1 - \bar{X}| + |x_2 - \bar{X}| + \dots + |x_{n-1} - \bar{X}| + |x_n - \bar{X}|}{n}$$

$$[\bar{d}_s = \bar{d}_{s-1} + |x_s - \bar{X}|]$$

$$\left(\bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^m |x_{vj} - \bar{X}| \cdot f_{vj}}{n} = \right.$$

$$\left. = \frac{|x_{v1} - \bar{X}| \cdot f_{v1} + |x_{v2} - \bar{X}| \cdot f_{v2} + \dots + |x_{v(m-1)} - \bar{X}| \cdot f_{v(m-1)} + |x_{vm} - \bar{X}| \cdot f_{vm}}{n} \right)$$

$$[\bar{d}_{vt} = \bar{d}_{v(t-1)} + |x_{vt} - \bar{X}| \cdot f_{vt}]$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

	A	B	C	D	E
126	Характеристики (показатели) вариации (меры изменчивости) для одномерной выборки данных				
127	Выборочное условное линейное отклонение (Центральный момент первого порядка) для одномерной выборки данных				
128	Наименование параметра	Наращивание компонентов выборочного условного линейного отклонения (Одномерная выборка данных)		Наращивание компонентов выборочного условного линейного отклонения (Сгруппированный вариационный ряд)	
129	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
130	1	X_{01}	56	X_{0v1}	-972
131	2	X_{02}	-72	X_{0v2}	-1612
132	3	X_{03}	168	X_{0v3}	-1220
133	4	X_{04}	224	X_{0v4}	-720
134	5	X_{05}	280	X_{0v5}	0
135	6	X_{06}	37		
136	7	X_{07}	162		
137	8	X_{08}	34		
138	9	X_{09}	90		
139	10	X_{010}	-153		
140	11	X_{011}	-97		
141	12	X_{012}	-225		
142	13	X_{013}	-468		
143	14	X_{014}	-711		
144	15	X_{015}	-839		
145	16	X_{016}	-714		
146	17	X_{017}	-658		
147	18	X_{018}	-418		
148	19	X_{019}	-293		
149	20	X_{020}	-237		
150	21	X_{021}	-112		
151	22	X_{022}	128		
152	23	X_{023}	0		
153	Выборочное условное линейное отклонение для одномерной выборки данных (до деления)	X_{00}	0	X_{0v0}	0
154	Выборочное условное линейное отклонение для одномерной выборки данных (после деления)	X_0	0	X_{0v}	0
155	Выборочное условное линейное отклонение для одномерной выборки данных (Excel) Вариант 1	X_0	0	X_{0v}	0
156	Выборочное условное линейное отклонение для одномерной выборки данных (Excel) Вариант 2	X_0	0		

Рис. 6. Детализация расчётов выборочного условного линейного отклонения для одномерной выборки данных

	A	B	C
157	Адрес ячейки формулы		Формула
158	Последовательные расчеты для одномерной выборки данных		
159	Ячейка C130	=(C6*\$C\$3-\$C\$58)	
160	Ячейка C131	=C130+(C7*\$C\$3-\$C\$58)	
161	Ячейка C152	=C151+(C28*\$C\$3-\$C\$58)	
162	Ячейка C153	=C152	
163	Ячейка C154	=C153/C3^2	
164	Последовательные расчеты для сгруппированного вариационного ряда		
165	Ячейка E130	=(E6*\$C\$3-\$E\$58)*G6	
166	Ячейка E131	=E130+(E7*\$C\$3-\$E\$58)*G7	
167	Ячейка E134	=E133+(E10*\$C\$3-\$E\$58)*G10	
168	Ячейка E153	=E134	
169	Ячейка E154	=E153/C3^2	
170	Применение функций редактора Excel для выборочного условного линейного отклонения		
171	Ячейка C155	=СУММПРОИЗВ(C6:C28-C60)/C3	
172	Ячейка E155	=СУММПРОИЗВ(E6:E10-C60;G6:G10)/C3	
173	Ячейка C156	=CPЗНАЧ(C6:C28)-CPЗНАЧ(C6:C28)	

Рис. 7. Используемые формулы и функции редактора Microsoft Excel с целью определения значения условного линейного отклонения для одномерной выборки данных

Для получения минимального значения суммарного отклонения от выборочного среднего в виде уже выборочного среднего линейного отклонения (выборочного центрального момента первого порядка по абсолютным значениям) с точки зрения рассматриваемой исходной функции, отражающей данную сумму, необходимо наличие равенства нулю первой производной данной функции, однако в данном случае необходимо знать в аналитическом виде производную функции вида $y = f(x) = |x|$, вывод которой встречается достаточно редко.

Поэтому представим вывод первой производной для данной функции в аналитическом виде согласно определению первой производной функции, как предела отношения приращения функции к приращению аргумента функции при условии его рассмотрения как бесконечно малой величины. Получим следующую цепочку доказательства:

$$\begin{aligned} y' = f'(x) = (|x|)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(|x + \Delta x| - |x|) \cdot (|x + \Delta x| + |x|)}{\Delta x \cdot (|x + \Delta x| + |x|)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(|x + \Delta x|)^2 - (|x|)^2}{\Delta x \cdot (|x + \Delta x| + |x|)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x \cdot (|x + \Delta x| + |x|)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x - x) \cdot (x + \Delta x + x)}{\Delta x \cdot (|x + \Delta x| + |x|)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (2 \cdot x + \Delta x)}{\Delta x \cdot (|x + \Delta x| + |x|)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot x + \Delta x}{|x + \Delta x| + |x|} = \frac{2 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |x + \Delta x| + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |x|} = \frac{2 \cdot x}{2 \cdot |x|} = \frac{x}{|x|}. \end{aligned}$$

Тогда получим следующее выражение для производной функции, взятой по выборочному среднему, то есть \bar{X} , отражающей выборочное среднее линейное отклонение, в качестве базового среднего значения рассматриваемой выборки или соответствующего сгруппированного вариационного ряда:

$$\begin{aligned} y' = f'(x) = (\bar{d})' &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}|}{n} \right)' = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}| \right)' = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}|} \cdot (x_i - \bar{X})'_{\bar{X}} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}|} \cdot (-1) = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}|} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{0}{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}|} = 0. \end{aligned}$$

Важное методическое примечание для исправления распространённой ошибки. Полученное выражение производной $\frac{d}{dc} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}| = \sum_{i=1}^n \text{sign}(x_i - \bar{X})$ показывает, что приравнивание её к нулю даёт условие баланса количества положительных и отрицательных отклонений. Однако из этого не следует, что выборочное среднее арифметическое \bar{x} является точкой минимума суммы абсолютных отклонений.

Напротив, минимум $\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{X}|$ достигается на выборочной медиане, а не на среднем. Среднее арифметическое минимизирует сумму квадратов отклонений достигается $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$.

В учебных целях необходимо чётко различать:

– выборочное среднее минимизирует выборочное среднее квадратичное отклонение (дисперсию, L2-норму).

– выборочная медиана минимизирует выборочное абсолютное отклонение (L1-норму).

Это различие принципиально для корректного формирования профессиональных компетенций студентов (Каракозов, 2024); игнорирование ведёт к ошибочному пониманию природы статистических показателей.

Расчёт значения выборочного среднего линейного отклонения или выборочного центрального момента первого порядка по абсолютным значениям для исходной одномерной выборки данных, согласно обозначенной формулировке, имеет следующую реализацию с представлением результата расчётов в виде дроби:

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{\sum_{i=1}^{23} |x_i - \bar{X}|}{23} = \frac{\left|51 - \frac{1117}{23}\right| + \left|43 - \frac{1117}{23}\right| + \dots + \left|59 - \frac{1117}{23}\right| + \left|43 - \frac{1117}{23}\right|}{23} = \\ &= \frac{|51 \cdot 23 - 1117| + |43 \cdot 23 - 1117| + \dots + |59 \cdot 23 - 1117| + |43 \cdot 23 - 1117|}{23 \cdot 23} = \\ &= \frac{|1173 - 1117| + |989 - 1117| + \dots + |1357 - 1117| + |989 - 1117|}{23 \cdot 23} = \\ &= \frac{|56| + |-128| + \dots + |240| + |-128|}{23 \cdot 23} = \frac{56 + 128 + \dots + 240 + 128}{23 \cdot 23} = \frac{3224}{23 \cdot 23} > 0. \end{aligned}$$

Тогда расчёт значения выборочного среднего линейного отклонения или выборочного центрального момента первого порядка по абсолютным значениям для получаемого из исходной выборки одномерных данных сгруппированного вариационного ряда осуществляется согласно следующей цепочке равенств аналогично с представлением результата расчётов в виде дроби:

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{\sum_{j=1}^5 |x_{vj} - \bar{X}| \cdot f_{vj}}{23} = \frac{\left|38 - \frac{1117}{23}\right| \cdot 4 + \left|43 - \frac{1117}{23}\right| \cdot 5 + \dots + \left|54 - \frac{1117}{23}\right| \cdot 4 + \left|59 - \frac{1117}{23}\right| \cdot 3}{23} = \\ &= \frac{|38 \cdot 23 - 1117| \cdot 4 + |43 \cdot 23 - 1117| \cdot 5 + \dots + |54 \cdot 23 - 1117| \cdot 4 + |59 \cdot 23 - 1117| \cdot 3}{23 \cdot 23} = \\ &= \frac{|874 - 1117| \cdot 4 + |989 - 1117| \cdot 5 + \dots + |1242 - 1117| \cdot 4 + |1357 - 1117| \cdot 3}{23 \cdot 23} = \\ &= \frac{|-243| \cdot 4 + |-128| \cdot 5 + \dots + |125| \cdot 4 + |240| \cdot 3}{23 \cdot 23} = \frac{243 \cdot 4 + 128 \cdot 5 + \dots + 125 \cdot 4 + 240 \cdot 3}{23 \cdot 23} = \\ &= \frac{972 + 640 + \dots + 500 + 720}{23 \cdot 23} = \frac{3224}{23 \cdot 23} > 0. \end{aligned}$$

На рис. 8 представлена детализация расчётов выборочного среднего линейного отклонения или центрального момента первого порядка по абсолютным значениям для исследуемой одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда с применением редактора электронных таблиц Microsoft Excel на основе реализации циклического алгоритма в рамках последовательного нахождения значения соответствующего расчётного параметра с точки зрения применения необходимой агрегатной функции, изначально применяемой для исследуемого одномерного массива данных, через призму практической реализации изначально итеративного, а в теории и рекурсивного, подходов к последовательному получению итогового значения данного параметра без учёта деления на объём выборки и отражения числового результата расчётов с учётом деления на объём выборки в виде десятичного числа.

На рис. 9 в наглядном виде представлены формулы, которые, во-первых, применяются для реализации последовательного наращивания компонентов итогового значения выборочного среднего линейного отклонения или центрального момента первого порядка по абсолютным значениям для исследуемой одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда, а, во-вторых, соотносят полученное итоговое расчётное значение исследуемого параметра с двумя способами получения числового значения данного параметра с использованием встроенных в редактор электронных таблиц Microsoft Excel соответствующих отражённых на данном рисунке функций.

	A	B	C	D	E
174	Выборочное среднее линейное отклонение (Центральный момент первого порядка по абсолютным значениям) для одномерной выборки данных				
	Наименование параметра	Наращивание компонентов выборочного среднего линейного отклонения (Одномерная выборка данных)		Наращивание компонентов выборочного среднего линейного отклонения (Сгруппированный вариационный ряд)	
175					
176	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
177	1	d_1	56	dv_1	972
178	2	d_2	184	dv_2	1612
179	3	d_3	424	dv_3	2004
180	4	d_4	480	dv_4	2504
181	5	d_5	536	dv_5	3224
182	6	d_6	779		
183	7	d_7	904		
184	8	d_8	1032		
185	9	d_9	1088		
186	10	d_{10}	1331		
187	11	d_{11}	1387		
188	12	d_{12}	1515		
189	13	d_{13}	1758		
190	14	d_{14}	2001		
191	15	d_{15}	2129		
192	16	d_{16}	2254		
193	17	d_{17}	2310		
194	18	d_{18}	2550		
195	19	d_{19}	2675		
196	20	d_{20}	2731		
197	21	d_{21}	2856		
198	22	d_{22}	3096		
199	23	d_{23}	3224		
200	Выборочное среднее линейное отклонение для одномерной выборки данных (до деления)	d_0	3224	dv_{01}	3224
201	Выборочное среднее линейное отклонение для одномерной выборки данных (после деления)	d	6,094517958	dv	6,094517958
202	Выборочное среднее линейное отклонение для одномерной выборки данных (Excel) Вариант 1	d	6,094517958	dv	6,094517958
203	Выборочное среднее линейное отклонение для одномерной выборки данных (Excel) Вариант 2	d	6,094517958		

Рис. 8. Детализация расчётов выборочного среднего линейного отклонения для одномерной выборки данных

	A	B	C
204	Адрес ячейки формулы	Формула	
205	Последовательные расчеты для одномерной выборки данных		
206	Ячейка C177	=ABS(C6*\$C\$3-\$C\$58)	
207	Ячейка C178	=C177+ABS(C7*\$C\$3-\$C\$58)	
208	Ячейка C199	=C198+ABS(C28*\$C\$3-\$C\$58)	
209	Ячейка C200	=C199	
210	Ячейка C201	=C200/C3^2	
211	Последовательные расчеты для сгруппированного вариационного ряда		
212	Ячейка E177	=ABS(E6*\$C\$3-\$E\$58)*G6	
213	Ячейка E178	=E177+ABS(E7*\$C\$3-\$E\$58)*G7	
214	Ячейка E181	=E180+ABS(E10*\$C\$3-\$E\$58)*G10	
215	Ячейка E200	=E181	
216	Ячейка E201	=E200/C3^2	
217	Применение функций редактора Excel для выборочного среднего линейного отклонения		
218	Ячейка C202	=СУММПРОИЗВ(ABS(C6:C28-C60))/C3	
219	Ячейка E202	=СУММПРОИЗВ(ABS(E6:E10-C60);G6:G10)/C3	
220	Ячейка C203	=СПОТКЛ(C6:C28)	

Рис. 9. Используемые формулы и функции редактора Microsoft Excel с целью определения значения выборочного среднего линейного отклонения для одномерной выборки данных

3. Выборочная исправленная дисперсия (выборочный исправленный центральный момент второго порядка) выборки объёмом n (соответствующего сгруппированного вариационного ряда), обозначается \bar{D} , значение параметра определяется как среднее арифметическое значений всех квадратов отклонений представленных в рамках выборки вариантов от значения выборочного среднего (равняется отношению суммы произведений квадратов разностей между значениями вариантов и значением выборочного среднего на их частоты к объёму выборки) с учётом скорректированного варианта реализации:

$$\begin{aligned} \bar{D} = \bar{\mu}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{n-1} - \bar{X})^2 + (x_n - \bar{X})^2}{n-1} \\ &= \frac{\left[\bar{D}_s = \bar{D}_{s-1} + (x_s - \bar{X})^2 \right]}{\left(\bar{D} = \bar{\mu}_2 = \frac{\sum_{j=1}^m (x_{vj} - \bar{X})^2 \cdot f_{vj}}{n-1} = \right.} \\ &= \left. \frac{(x_{v1} - \bar{X})^2 \cdot f_{v1} + (x_{v2} - \bar{X})^2 \cdot f_{v2} + \dots + (x_{v(m-1)} - \bar{X})^2 \cdot f_{vm} + (x_{vm} - \bar{X})^2 \cdot f_{vm}}{n-1} \right) \\ &= \frac{\left[\bar{D}_t = \bar{D}_{t-1} + (x_{vt} - \bar{X})^2 \cdot f_{vt} \right]}{n-1} \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что значение выборочной исправленной дисперсии можно получить как разность выборочного среднего квадратов и выборочного среднего для исходной выборки данных с учётом скорректированного варианта реализации:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n} = \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \cdot \bar{X}) + \sum_{i=1}^n (\bar{X})^2}{n} = \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2 \cdot \bar{X} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{n \cdot (\bar{X})^2}{n} \right) = \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2 \cdot \bar{X} \cdot \bar{X} + (\bar{X})^2 \right) = \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2 \cdot (\bar{X})^2 + (\bar{X})^2 \right) = \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\bar{X})^2 \right) = \frac{n}{n-1} \cdot (\bar{X}^2 - (\bar{X})^2). \end{aligned}$$

Аналогично значение выборочной исправленной дисперсии можно получить как разность выборочного среднего квадратов и выборочного среднего для сформированного сгруппированного вариационного ряда также с учётом скорректированного варианта реализации:

$$\begin{aligned}
\bar{D} &= \frac{\sum_{j=1}^m (x_{vj} - \bar{X})^2 \cdot f_{vj}}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{j=1}^m (x_{vj} - \bar{X})^2 \cdot f_{vj}}{n} = \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{j=1}^m x_{vj}^2 \cdot f_{vj} - 2 \cdot \sum_{j=1}^m (x_{vj} \cdot f_{vj} \cdot \bar{X}) + \sum_{j=1}^m (\bar{X})^2 \cdot f_{vj}}{n} = \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^m x_{vj}^2 \cdot f_{vj}}{n} - 2 \cdot \bar{X} \cdot \frac{\sum_{j=1}^m x_{vj} \cdot f_{vj}}{n} + \frac{(\bar{X})^2 \cdot \sum_{j=1}^m f_{vj}}{n} \right) = \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^m x_{vj}^2 \cdot f_{vj}}{n} - 2 \cdot \bar{X} \cdot \bar{X} + (\bar{X})^2 \right) = \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^m x_{vj}^2 \cdot f_{vj}}{n} - 2 \cdot (\bar{X})^2 + (\bar{X})^2 \right) = \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^m x_{vj}^2 \cdot f_{vj}}{n} - (\bar{X})^2 \right) = \frac{n}{n-1} \cdot (\bar{X}^2 - (\bar{X})^2).
\end{aligned}$$

По аналогии с предыдущим параметром для получения минимального значения суммарного отклонения от выборочного среднего, в виде уже выборочной исправленной дисперсии (выборочного исправленного центрального момента второго порядка) с точки зрения рассматриваемой исходной функции, отражающей данную сумму, необходимо наличие равенства нулю первой производной рассматриваемой функции.

Тогда получим следующее выражение для производной исследуемой функции, взятой по выборочному среднему, то есть \bar{X} , отражающей выборочное среднее линейное отклонение, в качестве базового среднего значения рассматриваемой выборки или соответствующего сгруппированного вариационного ряда:

$$\begin{aligned}
y' = f'(x) = (\bar{D})' &= (\bar{\mu}_2)' = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1} \right)' = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \right)' = \\
&= \frac{1}{n-1} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}) \cdot (x_i - \bar{X})'_{\bar{X}} = \frac{1}{n-1} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}) \cdot (-1) = \\
&= -\frac{2}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}) = -\frac{2}{n-1} \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Следует отметить, что повышение показателя степени в формируемых частичных отклонениях значений в выборке (сгруппированном вариационном ряду) относительно значения выборочного среднего позволяет существенно уменьшить (понижить) в плане получаемого итогового значения вклад значений малых отклонений и увеличить (повысить) вклад значений больших отклонений. Это, в свою очередь, усилит выделение больших отклонений в виде ярких маркеров или идентификаторов для последующего активного комплексного анализа факторов, влияющих на получение данных отклонений, отражающих наличие различных категорий выбросов в рамках исследуемой исходной выборки данных. Данное обстоятельство по итогу получит реальный выход анализ признака, атрибута или характеристики совокупности объектов в целом или отдельно взятого объекта в частности, участвующих в проведении исследования в рамках обозначенной предметной области.

Таким образом, выборочную исправленную дисперсию (выборочный исправленный центральный момент второго порядка) можно рассматривать как расчётный параметр, отражающий идеально возможное минимальное суммарное отклонение значений выборки относительно выборочного среднего, которое по умолчанию рассматривается как эталонное или абсолютное среднее значение признака или атрибута для представленной выборки объектов или соответствующего сгруппированного вариационного ряда, правда с учётом одновременно квадратичного и скорректированного варианта реализации.

Необходимо отметить, что в процессе нахождения выборочной исправленной дисперсии (выборочного исправленного центрального момента второго порядка) для одномерной выборки данных или соответствующего выборочного вариационного ряда при наличии всех целочисленных значений рассматриваемого параметра или атрибута объектов с учётом рассмотрения определенного ранее значения выборочного среднего в виде дроби получим сокращение объёмов выборки в рамках формируемых числовых значений в числителе и знаменателе, что, во-первых, объясняется получением, по сути, в чистом виде квадрата объёма выборки в рамках знаменателя, правда, с учётом получения скорректированной оценки, а, во-вторых, является проверкой правильности нахождения числового целочисленного итогового значения в рамках числителя дроби.

Сначала докажем данное утверждение в аналитическом виде как с точки зрения исходной формулы для нахождения выборочной исправленной дисперсии, так и в рамках её определения через разность выборочного среднего квадратов и выборочного среднего для выборки или сгруппированного вариационного ряда с учётом скорректированного варианта реализации:

$$\begin{aligned}
 \overline{D} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i \cdot n - \sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2}{n-1} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot n - \sum_{i=1}^n x_i)^2}{(n-1) \cdot n^2} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot n)^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \cdot n \cdot \sum_{i=1}^n x_i) + \sum_{i=1}^n (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{(n-1) \cdot n^2} = \\
 &= \frac{n^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \cdot n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i) + \sum_{i=1}^n (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{(n-1) \cdot n^2} = \\
 &= \frac{n^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \cdot n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{(n-1) \cdot n^2} = \\
 &= \frac{n^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \cdot n \cdot (\sum_{i=1}^n x_i)^2 + n \cdot (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{(n-1) \cdot n^2} = \\
 &= \frac{n^2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{(n-1) \cdot n^2} = \frac{n \cdot (n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2)}{(n-1) \cdot n^2} = \\
 &= \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{(n-1) \cdot n}.
 \end{aligned}$$

Понимание фактора получения кратности значений в числителе и знаменателе с точки зрения объёма выборки объясняется в итоге следующим совокупным равенством, отражённым в приведённом доказательстве, опять же, с точки зрения одновременного наличия всех целочисленных значений в выборке:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot n - \sum_{i=1}^n x_i)^2}{(n-1) \cdot n^2} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{(n-1) \cdot n}$$

Аналогично получим:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{n}{n-1} \cdot (\bar{X}^2 - (\bar{X})^2) = \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \right) = \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n^2} \right) = \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n^2} \right) = \frac{n}{(n-1) \cdot n^2} \cdot \left(n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{(n-1) \cdot n} \cdot (n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2). \end{aligned}$$

С точки зрения числовых значений исследуемой выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда можем получить следующие представленные ниже значения данного параметра с получением итогового результата расчётов в виде дроби.

Расчёт значения выборочной исправленной дисперсии или выборочного исправленного центрального момента второго порядка для исходной одномерной выборки данных согласно начальной формулировке с учётом скорректированного варианта реализации осуществляется согласно следующему выражению:

$$\begin{aligned} \bar{D} = \bar{\mu}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{23} (x_i - \bar{X})^2}{23-1} = \frac{\left(51 - \frac{1117}{23}\right)^2 + \left(43 - \frac{1117}{23}\right)^2 + \dots + \left(59 - \frac{1117}{23}\right)^2 + \left(43 - \frac{1117}{23}\right)^2}{22} = \\ &= \frac{(51 \cdot 23 - 1117)^2 + (43 \cdot 23 - 1117)^2 + \dots + (59 \cdot 23 - 1117)^2 + (43 \cdot 23 - 1117)^2}{22 \cdot 23^2} = \\ &= \frac{(1173 - 1117)^2 + (989 - 1117)^2 + \dots + (1357 - 1117)^2 + (989 - 1117)^2}{22 \cdot 23^2} = \\ &= \frac{56^2 + (-128)^2 + \dots + 240^2 + (-128)^2}{22 \cdot 23^2} = \frac{3163 + 16384 + \dots + 57600 + 16384}{22 \cdot 23^2} = \\ &= \frac{575368}{22 \cdot 23^2} = \frac{23 \cdot 25016}{22 \cdot 23^2} = \frac{25016}{22 \cdot 23}. \end{aligned}$$

Расчёт значения выборочной исправленной дисперсии или выборочного исправленного центрального момента второго порядка для получаемого из исходной выборки одномерных данных сгруппированного вариационного ряда с учётом скорректированного варианта реализации осуществляется согласно следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} \bar{D} = \bar{\mu}_2 &= \frac{\sum_{j=1}^5 (x_{vj} - \bar{X})^2 \cdot f_{vj}}{23-1} = \\ &= \frac{\left(38 - \frac{1117}{23}\right)^2 \cdot 4 + \left(43 - \frac{1117}{23}\right)^2 \cdot 5 + \dots + \left(54 - \frac{1117}{23}\right)^2 \cdot 4 + \left(59 - \frac{1117}{23}\right)^2 \cdot 3}{22} = \\ &= \frac{(874 - 1117)^2 \cdot 4 + (989 - 1117)^2 \cdot 5 + \dots + (1242 - 1117)^2 \cdot 4 + (1357 - 1117)^2 \cdot 3}{22 \cdot 23^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-243)^2 \cdot 4 + (-128)^2 \cdot 5 + \dots + 125^2 \cdot 4 + 240^2 \cdot 3}{22 \cdot 23^2} = \\
 &= \frac{59049 \cdot 4 + 16384 \cdot 5 + \dots + 15625 \cdot 4 + 57600 \cdot 3}{22 \cdot 23^2} = \\
 &= \frac{177147 + 81920 + \dots + 62500 + 172800}{22 \cdot 23^2} = \frac{575368}{22 \cdot 23^2} = \frac{23 \cdot 25016}{22 \cdot 23^2} = \frac{25016}{22 \cdot 23}.
 \end{aligned}$$

4. Выборочное исправленное среднее квадратическое отклонение (квадратный корень из выборочного исправленного центрального момента второго порядка) выборки объёмом n (соответствующего сгруппированного вариационного ряда), обозначается σ_x , значение параметра определяется как значение квадратного корня из значения выборочной исправленной дисперсии вариационного ряда, при этом данный расчётный параметр по факту является линейным аналогом выборочной исправленной дисперсии, что необходимо для получения адекватно комплексной оценки исходной одномерной выборки данных в плане последующего получения диапазона разброса имеющегося конечного множества значений исследуемого параметра ограниченной совокупности объектов:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma} &= \sqrt{\bar{D}} = \sqrt{\bar{\mu}_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}} \\
 \left(\bar{\sigma} &= \sqrt{\bar{D}} = \sqrt{\bar{\mu}_2} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (x_{vj} - \bar{X})^2 \cdot f_{vj}}{n-1}} \right).
 \end{aligned}$$

Расчёт значения выборочного исправленного среднего квадратического отклонения или квадратного корня из выборочного исправленного центрального момента второго порядка для исходной одномерной выборки данных согласно начальной формулировке с учетом скорректированного варианта реализации осуществляется согласно выражению:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{D}} = \sqrt{\bar{\mu}_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{23} (x_i - \bar{X})^2}{23-1}} = \sqrt{\frac{25016}{22 \cdot 23}}.$$

Расчёт значения выборочного исправленного среднего квадратического отклонения или квадратного корня из выборочного исправленного центрального момента второго порядка для получаемого из исходной выборки одномерных данных сгруппированного вариационного ряда с учетом скорректированного варианта реализации осуществляется согласно следующему выражению:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{D}} = \sqrt{\bar{\mu}_2} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^5 (x_{vj} - \bar{X})^2 \cdot f_{vj}}{23-1}} = \sqrt{\frac{25016}{22 \cdot 23}}.$$

На рис. 10 ниже представлена детализация расчётов выборочной исправленной дисперсии или выборочного исправленного центрального момента второго порядка для исследуемой одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда с применением редактора электронных таблиц Microsoft Excel на основе реализации циклического алгоритма в рамках последовательного нахождения значения соответствующего расчётного параметра с точки зрения применения необходимой агрегатной функции, изначально применяемой для исследуемого одномерного массива данных, через призму практической реализации изначально итеративного, а в теории и

рекурсивного, подходов к последовательному получению итогового значения данного параметра без учёта деления на объём выборки и отражения числового результата расчётов с учётом деления на объём выборки в виде получения целого числа, а также получением итогового значения действительного числа.

	A	B	C	D	E
221	Выборочная исправленная дисперсия (Исправленный центральный момент второго порядка) для одномерной выборки данных				
222	Наименование параметра	Наращивание компонентов выборочной исправленной дисперсии (Одномерная выборка данных)		Наращивание компонентов выборочной исправленной дисперсии (Сгруппированный вариационный ряд)	
223	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
224	1	D ₁	3136	Dv ₁	236196
225	2	D ₂	19520	Dv ₂	318116
226	3	D ₃	77120	Dv ₃	340068
227	4	D ₄	80256	Dv ₄	402568
228	5	D ₅	83392	Dv ₅	575368
229	6	D ₆	142441		
230	7	D ₇	158066		
231	8	D ₈	174450		
232	9	D ₉	177586		
233	10	D ₁₀	236635		
234	11	D ₁₁	239771		
235	12	D ₁₂	256155		
236	13	D ₁₃	315204		
237	14	D ₁₄	374253		
238	15	D ₁₅	390637		
239	16	D ₁₆	406262		
240	17	D ₁₇	409398		
241	18	D ₁₈	466998		
242	19	D ₁₉	482623		
243	20	D ₂₀	485759		
244	21	D ₂₁	501384		
245	22	D ₂₂	558984		
246	23	D ₂₃	575368		
247	Выборочная исправленная дисперсия для одномерной выборки данных (до сокращения)	D ₀₁	575368	Dv ₀₁	575368
248	Выборочная исправленная дисперсия для одномерной выборки данных (после сокращения)	D ₀₂	25016	Dv ₀₂	25016
249	Выборочная исправленная дисперсия для одномерной выборки данных (после деления)	D	49,43873518	Dv	49,43873518
250	Выборочная исправленная дисперсия для одномерной выборки данных (Excel) Вариант 1	D	49,43873518	Dv	49,43873518
251	Выборочная исправленная дисперсия для одномерной выборки данных (Excel) Вариант 2	D	49,43873518		
252	Выборочная исправленная дисперсия для одномерной выборки данных через выборочные средние	D	49,43873518		
253	Выборочная исправленная дисперсия для одномерной выборки данных через выборочные средние (Excel)	D	49,43873518		
254	Выборочное исправленное среднее квадратическое отклонение для одномерной выборки данных	S	7,03126839		
255	Выборочное исправленное среднее квадратическое отклонение для одномерной выборки данных (Excel)	S	7,03126839		

Рис. 10. Детализация расчётов выборочной исправленной дисперсии для одномерной выборки данных

На рис. 11 в наглядном виде представлены формулы, которые, во-первых, применяются для реализации последовательного наращивания компонентов итогового значения выборочной исправленной дисперсии или выборочного исправленного центрального момента второго порядка для исследуемой одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда, а, во-вторых, соотносят полученное итоговое расчётное значение исследуемого параметра с двумя способами получения числового значения данного параметра с использованием встроенных в редактор электронных таблиц Microsoft Excel соответствующих отражённых на данном рисунке функций.

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Также в рамках проведения анализа отклонений значений в рамках одномерной выборки данных и соответствующего сгруппированного вариационного ряда можно выделить основные характеристики (показатели) формы распределения (меры отклонения формы распределения) в виде выборочной асимметрии (применение выборочного центрального момента третьего порядка), обозначаемую как \bar{A}_3 , которая показывает, в какую именно сторону относительно выборочного среднего сдвинуто большинство значений распределения, а также выборочного эксцесса (применение выборочного центрального момента четвертого порядка), обозначаемого как \bar{E}_k , который показывает меру или степень сглаженности получаемого распределения данных, детальная информация о которых с математической точки зрения также отражена автором в его учебном пособии, при этом следует отметить, что по аналогии с выборочной исправленной дисперсией для данных характеристик также будет наблюдаться кратность получаемого в числителе итогового целочисленного значения относительно объема исходной выборки данных.

	А	В	С
256	Адрес ячейки формулы	Формула	
257	Последовательные расчеты для одномерной выборки данных		
258	Ячейка C224	=(C6*\$C\$3-\$C\$58)^2	
259	Ячейка C225	=C224+(C7*\$C\$3-\$C\$58)^2	
260	Ячейка C246	=C245+(C28*\$C\$3-\$C\$58)^2	
261	Ячейка C247	=C246	
262	Ячейка C248	=C247/C3	
263	Ячейка C249	=C248/(C3*(C3-1))	
264	Последовательные расчеты для сгруппированного вариационного ряда		
265	Ячейка E224	=(E6*\$C\$3-\$E\$58)^2*G6	
266	Ячейка E225	=E225+(E7*\$C\$3-\$E\$58)^2*G7	
267	Ячейка E228	=E228+(E10*\$C\$3-\$E\$58)^2*G10	
268	Ячейка E247	=E228+(E10*\$C\$3-\$E\$58)^2*G10	
269	Ячейка E248	=E247/C3	
270	Ячейка E249	=E248/(C3*(C3-1))	
271	Расчет выборочной исправленной дисперсии через выборочные средние		
272	Ячейка C252	=(C3/(C3-1))*(C106-C59^2)	
273	Расчет выборочного исправленного среднего квадратического отклонения		
274	Ячейка C254	=КОРЕНЬ(C249)	
275	Применение функций редактора Excel для выборочной исправленной дисперсии		
276	Ячейка C250	=СУММПРОИЗВ((C6:C28-C60)^2)/(C3-1)	
277	Ячейка E250	=СУММПРОИЗВ((E6:E10-C60)^2;G6:G10)/(C3-1)	
278	Ячейка C251	=ДИСП.В(C6:C28)	
279	Применение функций редактора Excel для выборочной исправленной дисперсии через выборочные средние		
280	Ячейка C253	=(C3/(C3-1))*(СУММКВ(C6:C28)/C3-CPЗНАЧ(C6:C28)^2)	
281	Применение функций редактора Excel для выборочного исправленного среднего квадратического отклонения		
282	Ячейка C255	=СТАНДОТКЛОН.В(C6:C28)	

Рис. 11. Используемые формулы и функции редактора Microsoft Excel с целью определения значения выборочной исправленной дисперсии для одномерной выборки данных

Необходимо также отметить наличие функциональных возможностей редактора электронных таблиц Microsoft Excel с целью получения совокупности значений представленных выше расчетных параметров исследуемой одномерной выборки данных в рамках применения соответствующего встроенного инструмента анализа данных «Описательная статистика», который с точки зрения рассмотренных характеристик (показателей) вариации (меры изменчивости) базируется как раз на использовании несмещенных оценок, что отражено на рис. 12 ниже.

Осознанное преодоление этих ошибок является важной частью формирования профессиональной компетенции, так как приучает студента не просто получать число, но и контролировать каждый шаг вычислений.

Типичные ошибки студентов при работе с Microsoft Excel и их преодоление

Даже при полном понимании аналитических формул студенты часто допускают ошибки на этапе реализации расчётов в табличном редакторе. Ниже приведены наиболее распространённые из них и способы их устранения.

The image shows the 'Data Analysis' tool in Microsoft Excel. The 'Descriptive Statistics' dialog box is open, showing the following settings:

- Входные данные: \$C\$6:\$C\$28
- Группирование: по столбцам
- Метки в первой строке:
- Параметры вывода:
 - Выходной интервал: \$A\$284
 - Новый рабочий диск:
 - Новая рабочая книга
 - Итоговая статистика
 - Уровень надежности: 95 %
 - К-ый наименьший: 1
 - К-ый наибольший: 1

The resulting output table is shown below:

	A	B
283		
284	<i>Одномерная выборка данных</i>	
285		
286	Среднее	48,56521739
287	Стандартная ошибка	1,466120809
288	Медиана	51
289	Мода	51
290	Стандартное отклонение	7,03126839
291	Дисперсия выборки	49,43873518
292	Экссесс	-1,161107419
293	Асимметричность	-0,204428072
294	Интервал	21
295	Минимум	38
296	Максимум	59
297	Сумма	1117
298	Счет	23
299	Наибольший(1)	59
300	Наименьший(1)	38
301	Уровень надежности(95,0%)	3,040548459

Рис. 12. Применение инструмента анализа данных «Описательная статистика» редактора Microsoft Excel для исследуемой одномерной выборки данных

Таблица 3.
Типичные ошибки студентов при реализации расчётов в Microsoft Excel и способы их устранения

Ошибка	Последствие	Как исправить
При расчёте среднего по сгруппированному ряду умножают значение на частоту, но забывают разделить на сумму частот	Завышенный результат	Вести промежуточный столбец значение \times частота, затем формулу: $\text{=СУММ(значения данного столбца) / СУММ(частоты)}$
Используют =ДИСП() (несмещённая) вместо =ДИСПР() (смещённая) при небольшом объёме выборки n	Расхождение с учебной формулой (деление на $n-1$ вместо n)	Чётко проговаривать: если в формуле дисперсии в знаменателе n – используем =ДИСПР() , если $(n-1)$ – =ДИСП()
Протягивают формулу, но забывают зафиксировать ячейку со средним значением (например, $\text{\$B\$1}$)	Во всех строках среднее «плывёт», берётся из соседней ячейки	Показать использование клавиши F4 для переключения типов ссылок (относительная/абсолютная)

Заключение

В статье предложен и апробирован трёхуровневый подход к обучению анализу одномерных данных в Microsoft Excel: аналитический вывод формул, итеративная реализация «вручную» (через накопление в столбцах) и итоговая проверка встроенными функциями. Такой подход, в отличие от простого использования готовых функций, позволяет студенту:

- понять природу каждого статистического показателя;
- освоить принципы итеративных вычислений, важные для программирования;
- научиться верифицировать результаты (ручной расчёт = функция = аналитика);
- избежать типовых ошибок (смещение дисперсий, неверная минимизация, работа со сгруппированными данными).

Доказано, что при целочисленной выборке числитель оценки выборочной исправленной дисперсии (а также и выборочной дисперсии в целом) кратен объёму выборки, что служит удобной проверкой правильности расчётов. Исправлено ошибочное утверждение о минимизации суммы модулей средним арифметическим (минимум даёт медиана).

Представленный дидактический материал позволяет студенту устанавливать причинно-следственные связи между исходными данными и получаемыми статистическими параметрами на основе итеративного (пошагового) подхода к анализу одномерной выборки.

Практическая значимость состоит в том, что предложенные материалы могут быть непосредственно использованы на лабораторных работах по курсам «Статистика», «Информационные технологии в профессиональной деятельности», «Математические методы обработки данных». Дальнейшее развитие темы – переход к многомерному анализу данных в Microsoft Excel с использованием инструмента «Анализ данных» и сравнению с результатами ручных итеративных расчётов.

Список литературы

- Анализ данных: учебник для вузов / под редакцией В. С. Мхитаряна. М.: Издательство Юрайт, 2025. (Высшее образование). Текст: электронный. Образовательная платформа Юрайт [сайт]. URL: <https://urait.ru/bcode/560311> (дата обращения: 18.03.2026).
- Богун В.В. Анализ данных с применением Microsoft Excel: Учебное пособие. М.: Прометей, 2026.
- Богун В.В. Применение рекурсивного подхода для исследования равнобедренных треугольников на плоскости // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2025. № 3 (39). С. 8–22. DOI: 10.24888/2500-1957-2025-3-8-22
- Дворяткина С.Н., Трофимец Е.Н. Практика преподавания высшей математики в вузах МЧС России в условиях цифровой трансформации образования // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2023. № 4 (32). С. 55–67. DOI: 10.24888/2500-1957-2023-4-55-67
- Каракозов С.Д., Петров Д.А., Худжина М.В. Учебно-профессиональная задача как средство оценивания профессиональных компетенций обучающихся ИТ-направлений подготовки на основе требований работодателей. Информатика и образование. 2024. 39(4). С. 5–13. DOI: 10.32517/0234-0453-2024-39-4-5-13
- Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика как фундамент новой комплексной прикладной дисциплины «Анализ данных» // Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2019. Т. 6. №. 1. С. 333–337.
- Смирнов Е.И., Поваренков Ю.П. Особенности математико-статистической обработки данных психологического эксперимента // Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования. Сборник тезисов докладов

международной научной конференции, посвященной 180-летию педагогического образования в г. Ельце. 2020. С. 108–109.

Тестов В.А. Формирование структур математического мышления при обучении математике в цифровую эру // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2025. № 3 (март). С. 204–217. DOI: 10.24412/2304-120X-2025-11047

Тестов В.А. Цифровизация науки и образования как результат синергии процессов информатизации и математизации // Педагогическая информатика. 2024. № 2. С. 111–120.

Шитакова О.Ю., Гуськов А.Ю., Горбачева Н.Е., Орлов Р.В., Сидорина Т.В. Математическая статистика в исследовании: педагогический аспект // Современное педагогическое образование. 2025. Т. 15. №2. С. 324–334. DOI: 10.20913/2618-7515-2025-2-14

Щукина Н.В., Харитоновна Н.Д. Изучение дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» с использованием дистанционных образовательных технологий // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. 2023. Т. 12. № 4. С. 51–57. DOI: 10.24412/2225-8264-2023-4-51-57

Яковлев, В.Б. Статистика. Расчёты в Microsoft Excel: учебник для вузов. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2025. (Высшее образование). Текст: электронный. Образовательная платформа Юрайт [сайт]. URL: <https://urait.ru/bcode/562660> (дата обращения: 18.03.2026).

Информация об авторе

Богун Виталий Викторович; кандидат педагогических наук; доцент; доцент кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике; ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского» (Российская Федерация, 150000, г. Ярославль, ул. Республиканская, д. 108/1); Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Ярославский филиал (Российская Федерация, 150003, г. Ярославль, ул. Кооперативная, д. 12А.); Международный университет бизнеса и новых технологий (МУБиНТ) (Российская федерация, 150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 80); E-mail: vvvital@mail.ru; ORCID: 0009-0003-6274-5104

FORMATION OF PROFESSIONAL COMPETENCIES OF UNIVERSITY STUDENTS IN THE FIELD OF ONE-DIMENSIONAL DATA ANALYSIS USING THE MICROSOFT EXCEL SPREADSHEET EDITOR

Bogun V. V.
Ph. D. (Pedagogy), Associate Professor

Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky;
Financial University under the Government of the Russian Federation, Yaroslavl branch;
International University of Business and New Technologies (MUBiNT), Yaroslavl

Abstract. In the implementation of research activities by university students of various fields of study during the project work process, the issue of analyzing one-dimensional or multidimensional arrays of numerical data obtained is relevant. Data analysis technologies, from the point of view of performing the necessary computational algorithms, are based on the combined use of mathematical objects from certain

sections of higher mathematics, linear algebra, and mathematical statistics. This article presents the main aspects of implementing the analysis of one-dimensional arrays of numerical data from the perspective of studying the values of a single feature or attribute of the investigated sample of objects, with an emphasis on calculated parameters, the values of which are based on the application of iterative algorithms with an interesting mathematical background. The implementation of the described mathematical calculations using the Microsoft Excel spreadsheet editor is presented, with the correct display of numerical values of parameters of the source data, intermediate results, and final calculation results to clearly reflect the dynamic aspects of the step-by-step solution of the one-dimensional numerical data analysis task. The use of the specified digital tool in the presented form will contribute to the development of students' mathematical and informational competencies at the university in terms of analyzing one-dimensional data arrays in the context of updating a comprehensive system of students' knowledge, skills, and abilities.

Keywords: scientific research activities of university students, data analysis, methods of mathematical statistics, information and communication technologies, Microsoft Excel spreadsheet editor

For citation: Bogun V. V. (2026). Formation of professional competencies of university students in the field of one-dimensional data analysis using the Microsoft Excel spreadsheet editor. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2 (42), 45–71. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-45-71

Copyright: © V. V. Bogun (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License.

References

- Analiz dannyh: uchebnik dlya vuzov* (2025). Pod redakciej V. S. Mhitaryana. Moscow: Izdatel'stvo Yurajt. (Vysshee obrazovanie). Tekst: ehlektronnyj. Obrazovatel'naya platforma Yurajt [sajt]. URL: <https://urait.ru/bcode/560311> (data obrashcheniya: 18.03.2026). (In Russ.)
- Bogun, V. V. (2026). *Analiz dannyh s primeneniem Microsoft Excel: Uchebnoe posobie*. Moscow: Prometej. (In Russ.)
- Bogun, V. V. (2025). Application of a Recursive Approach to the Study of Isosceles Triangles on the Plane. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 3(39), 8-22. DOI: 10.24888/2500-1957-2025-3-8-22 (In Russ., abstract in Eng.)
- Dvoryatkina, S. N., Trofimets, E. N. (2023). The Practice of Teaching Higher Mathematics in Universities of the Ministry of Emergency Situations of Russia in the Context of Digital Transformation of Education. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 4(32), 55-67. DOI: 10.24888/2500-1957-2023-4-55-67 (In Russ., abstract in Eng.)
- Karakozov, S. D., Petrov, D. A., Khudzhina, M. V. (2024). Educational and professional task as a means of assessing the professional competencies of IT students based on the requirements of employers. *Informatics and education*, 39(4), 5-13. DOI: 10.32517/0234-0453-2024-39-4-5-13 (In Russ., abstract in Eng.)
- Kremer, N. Sh. (2019). Probability Theory and Mathematical Statistics as the Foundation of a New Complex Applied Discipline "Data Analysis". *Sovremennaya matematika i koncepcii innovacionnogo matematicheskogo obrazovaniya*, 6(1), 333-337. (In Russ., abstract in Eng.)
- Shchukina, N. V. Haritonova, N. D. (2023). Studying the Discipline "Probability Theory and Mathematical Statistics" Using Distance Educational Technologies. *Vestnik Sibirskogo instituta biznesa i informacionnyh tehnologij*, 12(4), 51-57. DOI: 10.24412/2225-8264-2023-4-51-57 (In Russ., abstract in Eng.)

- Shitakova, O. Yu., Guskov, A. Yu., Gorbacheva, N. E., Orlov, R. V., Sidorina, T. V. (2025). Mathematical statistics in research: pedagogical aspect. *Professional education in the modern world*, 15(2), 324-334. DOI: 10.20913/2618-7515-2025-2-14 (In Russ., abstract in Eng.)
- Smirnov, E. I., Povarenkov, Yu. P. (2020). Osobennosti matematiko-statisticheskoy obrabotki dannyh psihologicheskogo ehksperimenta. *Fundamental'nye problemy obucheniya matematike, informatike i informatizacii obrazovaniya. Sbornik tezisov dokladov mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, posvyashchennoj 180-letiyu pedagogicheskogo obrazovaniya v g. El'ce*, 108-109. (In Russ.)
- Testov, V. A. (2025). On the formation of mathematical thinking structures in teaching mathematics in the digital era. *Scientific-methodological electronic journal "Koncept"*, 3, 204-217. DOI: 10.24412/2304-120X-2025-11047 (In Russ., abstract in Eng.)
- Testov, V. A. (2024). Digital Transformation of Science and Education as a Result of Synergy of Informatization and Mathematization Processes. *Pedagogicheskaya informatika*, 2, 111-120. (In Russ., abstract in Eng.)
- Yakovlev, V. B. (2025). *Statistika. Raschety v Microsoft Excel: uchebnik dlya vuzov. 2-e izd., ispr. i dop.* Moscow: Izdatel'stvo Yurajt. (Vysshee obrazovanie). Tekst: ehlektronnyj. Obrazovatel'naya platforma Yurajt [sajt]. URL: <https://urait.ru/bcode/562660> (data obrashcheniya: 18.03.2026). (In Russ.)

Information about the author

Vitaly V. Bogun; Candidate of Pedagogical Sciences; Associate Professor; Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Theory and Methods of Teaching Mathematics; Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky" (Russian Federation, 150000, Yaroslavl, Respublikanskaya St., 108/1); Financial University under the Government of the Russian Federation, Yaroslavl Branch (12A Kooperativnaya Street, Yaroslavl, 150003, Russian Federation); International University of Business and New Technologies (MUBiNT) (80 Sovetskaya Street, Yaroslavl, 150003, Russian Federation); E-mail: vvtal@mail.ru; ORCID: 0009-0003-6274-5104

Статья поступила в редакцию	12.05.2026
Принята к публикации	25.05.2026
Статья опубликована	19.06.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-72-91

УДК
378.147

**ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ИНТЕНСИВ КАК ФОРМА
ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ К
КОНСТРУИРОВАНИЮ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПО
ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ**

Лаптева Татьяна Дмитриевна
учитель

МАОУ «Гимназия №10» г. Перми

Аннотация. Актуальность исследования обусловлена необходимостью формирования у будущих учителей математики компетенций в области конструирования диагностических заданий по функциональной математической грамотности (ФМГ) в условиях отсутствия отдельного учебного курса и дефицита аудиторных часов. Цель исследования – разработка и апробация образовательного интенсива как формы подготовки будущих учителей математики к конструированию диагностических заданий по ФМГ школьников. Методология исследования включает проведение первичного эксперимента (констатирующий, формирующий и контрольный этапы) с использованием тестирования и экспертного анализа продуктов учебной деятельности студентов. В результате пилотного эксперимента установлено, что образовательный интенсив, построенный на принципах деятельностного и контекстного подходов, а также использования краеведческого материала, обеспечивает рост понимания будущими педагогами структуры ФМГ (идентификация компонентов выросла с 31% до 71%): по результатам экспертной оценки, 50% созданных студентами работ полностью соответствуют ключевым критериям ФМГ, а ещё 33% демонстрируют частичное соответствие. Научная новизна заключается в обосновании и апробации содержания образовательного интенсива, обеспечивающего формирование у будущих учителей математики умения конструировать диагностические задания. Практическая значимость состоит в предоставлении готовой к внедрению программы интенсива, интегрируемой в учебные курсы педагогических направлений.

Ключевые слова: функциональная математическая грамотность, диагностика, конструирование заданий, подготовка учителей, математическое образование, образовательный интенсив

Для цитирования: Лаптева Т.Д. Образовательный интенсив как форма подготовки будущих учителей к конструированию диагностических заданий по функциональной математической грамотности // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 2 (42). С. 72–91. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-72-91

Права: © Т.Д. Лаптева (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Одной из ключевых задач в современной системе образования при обучении математике школьников является формирование ФМГ, которая определяется на основе исследования PISA как способность индивидуума формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах и является важным надпредметным навыком, обеспечивающим конкурентоспособность и успешную профессиональную адаптацию выпускников школ. Приоритет ФМГ закреплён на федеральном уровне: формирование ФМГ указано в качестве одной из основных целей в Федеральной рабочей программе по математике для 5-9 классов (базовый и углублённый уровни) (Федеральная рабочая программа по предмету «Математика» для 5-9 классов базового уровня, 2025; Федеральная рабочая программа по предмету «Математика» для 5-9 классов углублённого уровня, 2025).

Результативность развития ФМГ у школьников напрямую зависит от профессиональной подготовки учителя, в частности, от владения им такой технологической компетентностью, как диагностическая.

Диагностическая компетентность учителя математики понимается нами, вслед за Н.В. Кутовой, как интегративный показатель, сочетающий «единство психолого-педагогических знаний, практической готовности к осуществлению диагностической деятельности и стремления к творческому преобразованию педагогического процесса» (Кутовая, 2012). В структуре этой компетентности можем выделить несколько взаимосвязанных компонентов: теоретико-методологический – знание теории и методов диагностики; проектировочно-конструкторский – умения проектировать и конструировать диагностические задания; организационно-процедурный – умение проводить диагностику; рефлексивно-оценочный – умение интерпретировать результаты и корректировать процесс обучения.

Умение конструировать диагностические задания по ФМГ является базовым и необходимым условием для осуществления её диагностики, без него невозможно реализовать последующие компоненты диагностической компетентности.

Реализация процесса формирования этого умения как элемента структуры диагностической компетенции у студентов педагогических направлений согласуется с содержанием общепрофессиональной компетенции, определённой во ФГОС ВО бакалавриата по направлениям подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование» и 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)» (ОПК-5): способен осуществлять контроль и оценку формирования результатов образования обучающихся, выявлять и корректировать трудности в обучении.

Проведённая первичная проверка уровня понимания сущности и диагностики ФМГ у будущих учителей математики, студентов (очного и заочного отделений) математического факультета Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета (ПГГПУ), выявила значительные пробелы: лишь 31% респондентов корректно идентифицировали компетентностные области ФМГ, 38% не смогли верно определить пороговый уровень ФМГ, а 72% не сумели охарактеризовать высший (6-й) уровень ФМГ по его описанию. Общий уровень подготовки оказался крайне низким: 59% опрошенных продемонстрировали низкий или недостаточный уровень готовности к диагностической деятельности. Полученные данные согласуются с результатами исследований Н.В. Кутовой (Кутовая, 2012) и Е.Н. Перовошиковой (Перовошикова, 2021), подтверждающими недостаточный уровень диагностической компетентности будущих педагогов. Это свидетельствует об актуальности целенаправленной подготовки студентов. Поскольку базовым, проектировочным компонентом этой компетентности является умение конструировать диагностические материалы, выявленный дефицит определяет необходимость формирования именно этого умения.

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

На данный момент в учебном плане ПГГПУ по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями)», где один из профилей «Математика», отсутствует отдельный курс по конструированию диагностических заданий для определения уровня ФМГ у школьников. Но аспекты диагностики ФМГ могут быть рассмотрены в формате образовательного интенсива в рамках дисциплины «Практикум по педагогической диагностике образовательных результатов» (72 часа, из которых 24 – аудиторные). В условиях ограниченности аудиторного времени, выделяемого в существующей программе на освоение специализированных диагностических умений, такой формат является педагогически целесообразным, позволяющим в сжатые сроки сфокусироваться на решении конкретной практической задачи – освоении алгоритма конструирования диагностических заданий. Использование этой формы обучения согласуется с принципами гибкости и практико-ориентированности современного образования и отвечает задаче эффективного формирования профессиональных компетенций в условиях дефицита времени.

Цель статьи – описание и оценка эффективности образовательного интенсива как формы подготовки будущих учителей математики к конструированию диагностических заданий по ФМГ школьников.

Обзор литературы

Анализ современных отечественных психолого-педагогических исследований позволяет констатировать возрастающий интерес к проблеме формирования ФМГ у обучающихся основной школы. Однако вопрос целенаправленной методической подготовки будущих учителей математики к конструированию диагностических материалов в этой области остаётся малоизученным.

Так, в научной литературе можно выделить несколько смежных, но слабо связанных между собой направлений:

1. Исследования, посвящённые формированию диагностической компетентности будущих учителей (Дорофеева, 2007; Ивутина, 2007; Гутник, 2014; Перевощикова, 2014). Данные материалы раскрывают общие подходы к её формированию.

2. Работы, направленные на совершенствование у педагогов компетенции по формированию ФГ (Тетина, 2024; Косикова, 2025), в том числе касающиеся конструирования диагностических заданий по ФМГ (Перевощикова, 2022).

Таким образом, несмотря на наличие разработанных смежных областей, обнаруживается существенный пробел: недостаточно целостных исследований, посвящённых формированию у будущих учителей математики умения конструировать диагностические материалы по ФМГ. Требуют дальнейшего изучения методологические основы, этапы, критерии оценки и педагогические инструменты реализации этого процесса в условиях высшего педагогического образования.

В данном контексте особый интерес представляет поиск эффективных и компактных форматов обучения. Такие форматы, как мастер-класс или вебинар, в большей степени ориентированы на трансляцию готовых решений или знаний, но не обеспечивают глубокой практической отработки в условиях ограниченного времени. Хакатон, хоть и нацелен на быстрое создание продукта, часто делает акцент на инновации и техническую сложность, что может отодвигать на второй план соответствие задания строгим педагогическим и диагностическим критериям. Образовательный интенсив, представляющий собой модель концентрированного, практико-ориентированного обучения, нацеленную на достижение конкретного продуктивного результата в сжатые сроки, в наибольшей степени отвечает поставленной цели (Крылова, 2024). Он позволяет интегрировать новые образовательные технологии и формирование студентами своей траектории (Попова, 2020).

Таким образом, научная новизна исследования заключается в разработке и апробации образовательного интенсива как одной из эффективных форм подготовки будущих учителей математики к конструированию диагностических заданий по ФМГ, в частности, формированию умения конструировать диагностические задания по ФМГ.

Методология исследования

В исследовании проверялась следующая гипотеза: использование образовательного интенсива на краеведческом материале способствует формированию умения конструировать диагностические задания у будущих учителей математики благодаря комплексному воздействию следующих факторов: концентрации на единой практической задаче, сжатой теоретической подготовке и последующим немедленным закреплением полученных знаний, непрерывной консультативной помощи со стороны преподавателей и высокой личностной вовлечённостью студентов, что проявится в следующем:

- 1) увеличение доли правильных ответов в опроснике на понимание структуры ФМГ на 30% и более;
- 2) способность не менее 50% всех участников конструировать диагностические задания, соответствующие критериям ФМГ.

Пилотный педагогический эксперимент проводился в 2025–2026 учебном году и включал три последовательных этапа (рис. 1). Выборку исследования составили студенты 3 курса (очного и заочного отделений) математического факультета ПГГПУ.



Рис. 1. Этапы пилотного педагогического эксперимента

Под умением конструировать диагностические задания по ФМГ в рамках исследования понимается способность будущего учителя к последовательному выполнению следующих действий:

- определение диагностируемого элемента ФМГ (содержательная и компетентностная области оценки, уровень);
- создание или подбор реалистичной, проблемной жизненной ситуации;
- перевод контекстной ситуации в математическую модель, выбор адекватного математического аппарата;

**ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

- разработка системы взаимосвязанных вопросов, выявляющих разные аспекты ФМГ;
- определение показателей выполнения, формата ответа и шкалы оценивания.

Содержание интенсива и методы оценки его эффективности были выстроены в соответствии с данной структурой умения.

Оценка эффективности интенсива носила двухуровневый характер, что обусловлено структурой формируемого умения. Поскольку умение конструировать диагностические задания базируется на глубоком понимании сути, компонентов и критериев ФМГ, на первом уровне оценивалось изменение знаниевого компонента умения с помощью входного и выходного тестирования (опросник). На втором уровне оценивалось непосредственно практическое применение этих знаний – способность воплотить теоретические принципы в конкретном продукте (диагностическом задании), что проверялось методом экспертного анализа разработанных студентами материалов. Такой подход позволяет установить не только факт улучшения теоретической подготовки, но и способность транслировать её в профессиональное действие.

Для сбора эмпирических данных были использованы следующие методы и средства:

1. Педагогическое тестирование (входное и выходное, на констатирующем и контрольном этапах) с целью оценки уровня теоретических знаний о структуре, компонентах и диагностике ФМГ (разработан опросник, включающий вопросы различных типов, направленные на проверку ключевых аспектов понимания ФМГ: её сущности, структурных и компетентностных компонентов, уровней сформированности и методологии оценки). Вопросы, включенные в опросник, направлены на оценку уровня понимания структуры ФМГ и владения теоретическими основами методики конструирования диагностических заданий, а также аналитических умений, необходимых для этой деятельности (табл. 1).

2. Анализ продуктов учебной деятельности студентов, разработанных ими в ходе интенсива.

3. Педагогическое наблюдение за процессом групповой работы и обсуждениями в рамках интенсива.

Таблица 1.

*Примеры вопросов опросника, направленных на оценку понимания ФМГ
и основ конструирования заданий*

№	Вопрос	Ответ						
1	<p>Проанализируйте задачу: «В торговом центре действует скидка 20% на все товары. Покупатель выбрал товар стоимостью 5000 рублей. Сколько он заплатит после применения скидки?».</p> <p>Соотнесите контекст, содержательную и компетентностную области с их характеристиками:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; padding: 2px;">контекст задачи</td> <td style="width: 50%; padding: 2px;">количество</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">содержательная область</td> <td style="padding: 2px;">применять</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">компетентностная область</td> <td style="padding: 2px;">личный</td> </tr> </table>	контекст задачи	количество	содержательная область	применять	компетентностная область	личный	<p>Контекст задачи – личный,</p> <p>содержательная область – количество,</p> <p>компетентностная область – применять</p>
контекст задачи	количество							
содержательная область	применять							
компетентностная область	личный							
2	<p>Какой уровень математической грамотности соответствует умениям обучающихся осмысливать, обобщать и использовать информацию, полученную на основе исследования и моделирования сложных проблемных ситуаций, использовать свои знания в нестандартных условиях, устанавливать связи между разными источниками информации и свободно преобразовывать информацию из одной формы в другую, владеть продвинутым математическим аппаратом, формулами, увидеть и применить нестандартный подход для решения задач, а также доказывать своё решение задачи и его соответствие исходным условиям?</p> <p>3; 4; 5; 6.</p>	6						

3	<p>Какое из перечисленных свойств НЕ характерно для заданий по формированию ФМГ?</p> <ul style="list-style-type: none"> • описание жизненной ситуации; • использование стандартных математических задач; • необходимость перевода условий на математический язык; • наличие иллюстративного материала. 	Использование стандартных математических задач
---	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------

Для интерпретации данных опросника в основном исследовании предусмотрена шкала из четырёх уровней (высокий, средний, низкий, недостаточный), критерии которых представлены в таблице 2.

Таблица 2.

Система оценивания результата опросника на определение уровня теоретической подготовки будущих учителей математики к осуществлению диагностики ФМГ

Количество правильных ответов	Уровень	Характеристика (описание)
9-10	Высокий	Демонстрирует понимание сущности ФМГ, её структуры и компонентов. Свободно ориентируется в содержательных и компетентностных областях ФМГ. Способен анализировать учебные задачи с точки зрения соответствия критериям ФМГ, определять контекстную, содержательную и компетентностную принадлежность заданий. Различает эффективные и неэффективные методы формирования ФМГ
7-8	Средний	Общее понимание сущности ФМГ имеется, но наблюдаются отдельные пробелы в знании структуры и компонентов. В основном правильно определяет содержательные и компетентностные области, но допускает ошибки в их разграничении. Не всегда точно определяет уровни математической грамотности. Способен анализировать учебные задачи, но испытывает затруднения в комплексной оценке их диагностического потенциала
5-6	Низкий (удовлетворительный)	Фрагментарное представление о ФМГ, путается в определении сущности и структуры. Затрудняется в точном определении содержательных и компетентностных областей. Имеет общее представление о системе оценки ФМГ, но не владеет конкретными характеристиками уровней. Допускает существенные ошибки в определении их диагностического потенциала. Слабо различает методы формирования ФМГ. Требуется систематизация знаний и углубленная подготовка
менее 5	Недостаточный (необходима серьёзная дополнительная подготовка)	Отсутствует целостное представление о ФМГ, не может точно определить её сущность и структуру. Не различает содержательные и компетентностные области ФМГ. Не владеет информацией о системе оценки ФГ в России. Не способен проводить анализ учебных задач с точки зрения ФМГ, не определяет их диагностический потенциал. Не различает методы формирования ФМГ. Требуется серьёзная дополнительная подготовка по теоретическим основам ФМГ

4. Оперативная проверка усвоения профессиональной терминологии в интерактивной форме (например, в форме кроссворда).

Анализ полученных данных осуществлялся с использованием методов количественной и качественной обработки:

**ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

- количественный анализ результатов тестирования (расчёт долей правильных ответов, распределения по уровням подготовки, сравнение показателей на входе и выходе);
- качественный содержательный анализ разработанных студентами заданий и сопровождающей документации к ним с целью выявления соответствия критериям ФМГ школьников;
- сравнительный анализ данных констатирующего и контрольного этапов для определения динамики и эффективности проведённого интенсива.

В ходе занятия студенты не только анализировали готовые задания, но и составляли их, используя профессионально-значимый контекст (краеведческий материал).

Содержание интенсива организовано в семь последовательных блоков, реализующих принципы интенсивного обучения (табл. 3).

Таблица 3.

*Содержание образовательного интенсива по формированию умения конструировать
диагностические задания по ФМГ*

№	Название блока	Характеристика и содержание блока, отражающие деятельность студентов	Время реализации
1	Теоретические основы ФГ	Знакомство с эволюцией понятия «функциональная грамотность» посредством анализа подходов, представленных в исследованиях PISA и в работах А.А. Леонтьева (Леонтьев, 2016), А.В. Хуторского (Хуторской, 2023), Н.Ф. Виноградовой (Виноградова, 2018), Н.М. Кузнецовой (Кузнецова, 2021), М. Озенча и С. Шаркита (Özenç, 2021), Э.Г. Азимова и А.Н. Щукина (Азимов, 2009) и др.; исследование концептуальной рамки ФГ, предложенной Л.О. Рословой, К.А. Краснянской и Е.С. Квитко (Рослова, 2019); выделение отличий ФГ от базовой грамотности и ключевых признаков функционально грамотного человека (Борщевская, 2021); поиск и разбор кейсов, актуальных статей и статистики по Пермскому краю, а также сравнение и краткий аналитический отчёт	2 аудиторных часа
2	Структура ФМГ	Изучение ФМГ как составляющей ФГ (Подлипский, 2020; Краснянская, 2023); анализ модели МГ PISA, включающей компоненты: содержательные области (изменения и зависимости, пространство и форма, количество, неопределённость и данные), компетентностные области (математические рассуждения, формулирование, применение, интерпретация и оценка) и категории контекстной области (общественная жизнь; личная жизнь; образование / профессиональная деятельность; научная деятельность) (Басюк, 2019; Ковцун 2022; Воронина, 2024); проектирование шаблона для создания заданий по ФМГ	

3	Результаты общероссийской и международной оценки ФМГ	Формирование реалистичного представления о состоянии ФМГ школьников посредством обсуждения типичных дефицитов и успешных практик в области ФМГ, представленных на основе данных Федерального института оценки качества образования и результатов исследований PISA, а также соотнесение данных с контекстом Пермского края	
4	Моделирование процесса формирования ФМГ	Анализ структурно-логической модели формирования ФМГ (на примере модели Н.В. Дударевой и Е.А. Утюмовой (Дударева, 2021)), в частности, этапов формирования, преемственности между уровнями образования и возможностях проектирования индивидуальных образовательных траекторий; разработка схемы формирования ФМГ	
5	Методика конструирования диагностических заданий (критерии, требования, инструменты оценки)	<p>Изучение и сравнение 6 уровней сформированности ФМГ обучающихся (на основе исследования PISA), принципов построения валидной диагностической работы и системы критериев конструирования заданий, в частности, таких (Методические рекомендации, 2022):</p> <ul style="list-style-type: none"> • комплексность – качество, определяющее общую структуру и отдельные задания: 1) текстовая часть из широкого спектра контекстов и к ней ряд вопросов; 2) вопросы относятся к разным темам или разделам программы по математике; 3) предполагается использование для оперирования соответствующим математическим содержанием различных когнитивных процессов, характерных, согласно PISA, для математической грамотности; 4) при постановке вопроса используются различные формы ответа; • реалистичность (контекстность) – сюжет ситуации и задания к нему должны быть взяты или могли бы быть взяты из реальной жизни; • проблемность – качество задания, в котором отражается наличие в жизни затруднения, альтернатив, ограничений, которые должны быть преодолены или разрешены 	
6	Практикум по разработке комплексных заданий (практико-ориентированный модуль, моделирующий реальную профессиональную задачу)	Групповая работа по разработке оригинального комплексного диагностического задания по ФМГ для учеников определённого класса на краеведческом материале по конкретной тематике (содержательной области), включающая оформление сопроводительной документации (решения к заданиям представленной работы, характеристика по компонентам ФМГ, указание уровня сложности, объект оценки (предметный и метапредметный результаты), формат ответа, количество баллов, способ проверки (машинный или экспертный)	4 часа самостоятельной работы

**ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

7	Представление итогов групповой работы	Защита разработанных заданий и выполнение теоретического задания в качестве закрепления и проверки усвоения профессиональной терминологии	1 аудиторный час
---	---------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------

Интенсификация учебного процесса в рамках предложенного формата обеспечивается следующими механизмами:

- концентрацией на единой практической задаче (весь содержательный материал (блоки 1–5) подчинён достижению одной цели – разработке диагностического задания, это исключает рассеивание внимания и обеспечивает высокую фокусировку);
- циклом «теория → немедленная практика → обратная связь» (сжатая теоретическая часть (блоки 1–4) сразу применяется в анализе готовых заданий (блок 5), а затем – в собственной разработке (блок 6), что ускоряет формирование умения);
- симуляцией профессионального «спринта» (работа в малых группах с жёстким ограничением по времени моделирует реальную ситуацию, требующую от учителя оперативного проектирования диагностического инструментария);
- контекстной активизацией через краеведческий материал (использование контекста про Пермский край позволяет ускорить познавательную активность, повышает личностную значимость задачи и способствует более глубокой проработке критериев реалистичности и контекстности задания);
- непрерывной экспертной поддержкой (процесс сопровождается консультациями и завершается процедурой публичной экспертной оценки (блок 7), что обеспечивает оперативную коррекцию и рефлексию).

В ходе реализации блока 5 «Методика конструирования диагностических заданий (критерии, требования, инструменты оценки)» подразумевается групповая работа будущих педагогов по изучению системы критериев для разработки заданий (комплексность, мотивационность, реалистичность (контекстность), проблемность, компетентность, уровневость, вариативность решений), представленных в методических рекомендациях по формированию ФГ обучающихся 5-9 классов с использованием открытого банка заданий (Методические рекомендации, 2022), а также реализация этой системы на примере ряда комплексных заданий, среди которых комплексное задание для обучающихся 8 класса «Начинающий кондитер» (рис. 2, табл. 4).

Прочитайте текст «Начинающий кондитер».

НАЧИНАЮЩИЙ КОНДИТЕР

Стоимость обучающего онлайн-курса «Начинающий кондитер» – 5000 рублей.

Для того чтобы начать работу кондитера на дому, необходимо купить специальное оборудование, стоимость которого составляет 7000 рублей.

Тоня прошла онлайн-курс, купила оборудование и начала готовить дома торты на продажу.

Для своих тортов она установила прайс-лист, приведённый в таблицах ниже:

Торт	Цена за 1 кг	Украшение торта	Цена из расчёта на 1 кг торта
«Малиновый»	1500 руб.	Полумесяц из ягод	300 руб.
«Чизкейк»	1300 руб.	Ягодный венок	400 руб.
«Медовик»	1000 руб.	Полное покрытие ягодами	600 руб.
«Каравай»	800 руб.		

Выполните задания 1 – 5.

*Рис. 2. Текст комплексного задания «Начинающий кондитер»
(Методические рекомендации, 2022)*

Таблица 4.

Задания к комплексному заданию «Начинающий кондитер»
(Методические рекомендации, 2022)

№	Текст задания																									
1	<p>Задание 1. Среди данных ниже утверждений выберите все НЕВЕРНЫЕ. (Все сравнения из расчёта на 1 кг торта.) <i>Отметьте все верные варианты ответа.</i></p> <p><input type="checkbox"/> Цена торта «Медовик» больше цены торта «Каравай» на 25%. <input type="checkbox"/> Полное покрытие ягодами вдвое дороже полумесяца из ягод. <input type="checkbox"/> Для торта «Медовик» с покрытием «Ягодный венок» цена покрытия составляет 0,4 общей цены. <input type="checkbox"/> Средняя стоимость торта без украшения у Тони составляет 1150 рублей. <input type="checkbox"/> Цена полного покрытия ягодами не превышает половины цены любого торта.</p>																									
2	<p>Сколько стоит согласно прайс-листу, установленному Тоней, торт «Малиновый» весом 2 кг, украшенный ягодным венком? <i>Отметьте один верный вариант ответа.</i></p> <p><input type="checkbox"/> 1900 руб. <input type="checkbox"/> 3400 руб. <input type="checkbox"/> 3600 руб. <input type="checkbox"/> 3800 руб.</p>																									
3	<p>Задание 3. Проверьте, все ли результаты расчётов, выполненных Тоней, верны. <i>Выберите нужные варианты ответа в выпадающих меню.</i></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Название торта</th> <th>Масса, кг</th> <th>Украшение</th> <th>Стоимость, руб.</th> <th>Верен ли расчёт?</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Чизкейк</td> <td>1,4</td> <td>Без украшения</td> <td>1820</td> <td><i>Верно/Неверно</i></td> </tr> <tr> <td>Медовик</td> <td>0,8</td> <td>Полумесяц из ягод</td> <td>2470</td> <td><i>Верно/Неверно</i></td> </tr> <tr> <td>Каравай</td> <td>1,5</td> <td>Ягодный венок</td> <td>1800</td> <td><i>Верно/Неверно</i></td> </tr> <tr> <td>Малиновый</td> <td>1,9</td> <td>Полное покрытие ягодами</td> <td>2850</td> <td><i>Верно/Неверно</i></td> </tr> </tbody> </table>	Название торта	Масса, кг	Украшение	Стоимость, руб.	Верен ли расчёт?	Чизкейк	1,4	Без украшения	1820	<i>Верно/Неверно</i>	Медовик	0,8	Полумесяц из ягод	2470	<i>Верно/Неверно</i>	Каравай	1,5	Ягодный венок	1800	<i>Верно/Неверно</i>	Малиновый	1,9	Полное покрытие ягодами	2850	<i>Верно/Неверно</i>
Название торта	Масса, кг	Украшение	Стоимость, руб.	Верен ли расчёт?																						
Чизкейк	1,4	Без украшения	1820	<i>Верно/Неверно</i>																						
Медовик	0,8	Полумесяц из ягод	2470	<i>Верно/Неверно</i>																						
Каравай	1,5	Ягодный венок	1800	<i>Верно/Неверно</i>																						
Малиновый	1,9	Полное покрытие ягодами	2850	<i>Верно/Неверно</i>																						
4	<p>Задание 4. Чтобы было удобнее подсчитывать стоимость готового торта, Тоня хочет записать соответствующую формулу. По какой формуле Тоня может вычислять стоимость C торта с покрытием, если m – масса торта, N – стоимость одного килограмма торта, n – стоимость покрытия одного килограмма торта? <i>Отметьте все верные варианты ответа.</i></p> <p><input type="checkbox"/> $C = mN + mn$ <input type="checkbox"/> $C = m(N + n)$ <input type="checkbox"/> $C = mN + n$ <input type="checkbox"/> $C = N + mn$ <input type="checkbox"/> $C = N(m + n)$</p>																									
5	<p>Задание 5. Устанавливая цену 1 кг торта, Тоня вычислила стоимость всех затрат на его приготовление и добавила размер прибыли. Тоня определила, что прибыль составляет $\frac{1}{4}$ цены. За какое наименьшее время прибыль от продаж покроет затраты на обучение и оборудование, если она будет продавать 2 кг торта ежедневно? <i>Запишите свой ответ в виде числа.</i> <i>Ответ: за ___ дней.</i> <i>Объясните свой ответ:</i></p>																									

Результаты

Апробация предложенной формы подготовки будущих учителей к диагностике ФМГ школьников состоялась в ходе освоения студентами 3 курса очного и заочного отделений математического факультета ПГПУ дисциплины «Практикум по педагогической диагностике образовательных результатов».

**ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

В рамках практикума по разработке комплексных заданий студенты получили задачу: распределиться по группам (состав – 2–3 человека) и разработать комплексное диагностическое задание по ФМГ на материале краеведения для обучающихся 7 класса согласно требованиям:

- одно комплексное задание с описанием реального жизненного сюжета и 2 задания к нему с математическим содержанием «Неопределённость и данные», удовлетворяющие, как минимум, таким критериям: комплексность, реалистичность (контекстность) и проблемность;
- задания в комплексном задании должны быть направлены на оценку понимания базовых вероятностных понятий, умения работать со статистическими данными, способности делать выводы на основе данных;
- к каждому заданию реальной ситуации необходимо представить ответы и решения, а также характеристику по схеме: содержательная область оценки, компетентностная область оценки, контекст, уровень сложности, формат ответа, объект оценки (предметный и метапредметный результаты), максимальный балл (1 или 2), способ проверки.

Эффективность образовательного интенсива оценивалась путём сравнения данных констатирующего и контрольного этапов, а также через экспертный анализ продуктов, созданных студентами (экспертная оценка проводилась независимыми экспертами: доцентом кафедры высшей математики и методики обучения математике ПГГПУ и учителем математики высшей квалификационной категории).

Для обеспечения объективности экспертного анализа была разработана и согласована с экспертами система критериев, позволяющая дифференцировать уровни соответствия созданных заданий требованиям ФМГ (табл. 5).

*Таблица 5.
Критерии и уровни экспертной оценки диагностических заданий по ФМГ*

Критерий задания на формирование ФМГ	Полное соответствие (3 балла)	Частичное соответствие (2 балла)	Низкое соответствие, практически несоответствие (0–1 баллов)
1. Комплексность	Единый жизненный контекст и 2 взаимосвязанных задания к нему, проверяющих разные умения (например, вычисление и интерпретацию)	Контекст и задания присутствуют, но их связь поверхностна или задания однотипны	Отсутствует единый контекст; задание одно, шаблонное
2. Реалистичность (контекстность)	Сюжет основан на аутентичной, правдоподобной жизненной ситуации; данные реалистичны	Ситуация жизненная, но данные условны или чрезмерно упрощены	Ситуация искусственная, учебная; данные абстрактны
3. Проблемность	Задание содержит ясную проблему, альтернативу или выбор; решение требует анализа, обоснования, выхода за рамки алгоритма	Проблема обозначена, но решение сводится к применению стандартного алгоритма без интерпретации	Проблема отсутствует; требуется прямое применение известного правила или формулы

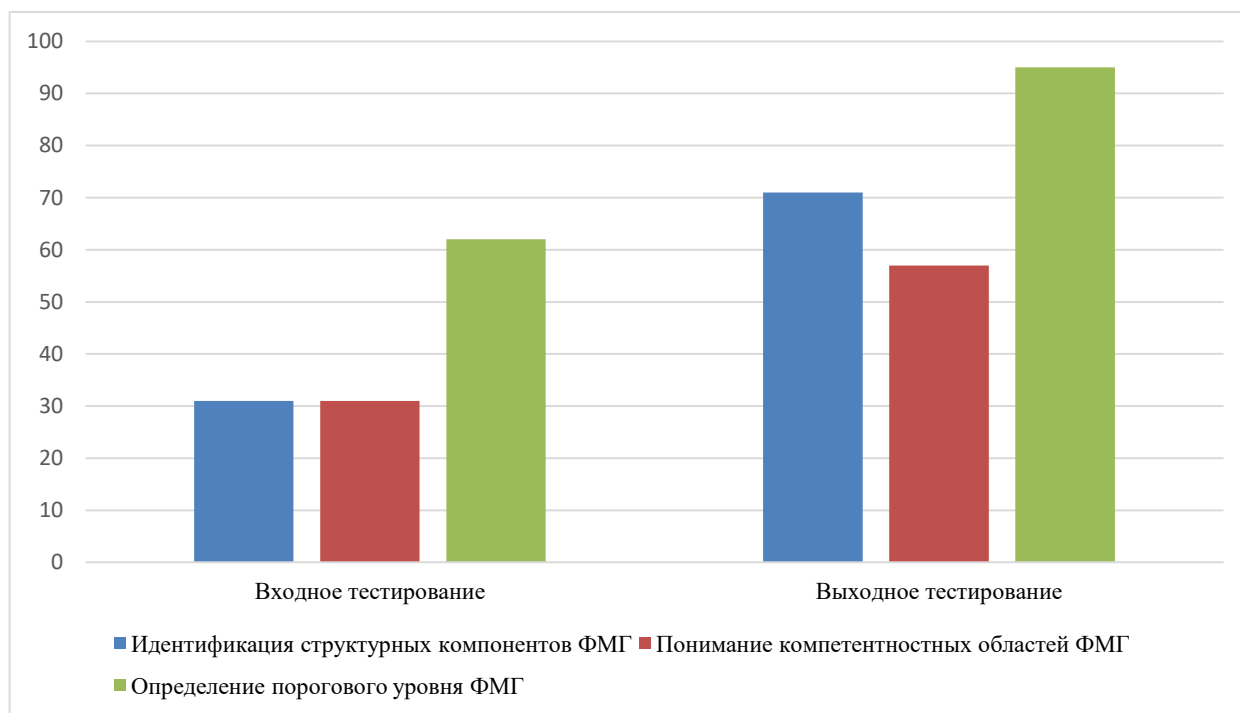


Рис. 3. Сравнительный анализ результатов тестирования

Критерии оценки: полное соответствие: 8–9 баллов; частичное соответствие: 5–7 баллов; несоответствие: 0–4 балла. Эксперты оценивали работу по трём критериям, выставляя от 0 до 3 баллов за каждый. Итоговый уровень соответствия определялся как среднее арифметическое оценок двух экспертов.

Динамика понимания ФМГ и освоения методики конструирования.

Сравнительный анализ результатов тестирования выявил прогресс по ключевым параметрам понимания ФМГ (рис. 3):

- идентификация структурных компонентов ФМГ улучшилась более чем в два раза: доля правильных ответов возросла с 31% до 71%;
- понимание компетентностных областей ФМГ: показатель увеличился с 31% до 57% (наибольшие затруднения вызвали различие операций «формулировать» и «интерпретировать»);
- определение порогового уровня ФМГ: число респондентов, ответивших верно, выросло с 62% до 95%.

Распределение студентов по уровням готовности (высокий, средний, низкий, недостаточный) после интенсива существенно сместилось в сторону более высоких категорий.

Качество разработанных диагностических материалов.

Экспертный анализ результатов деятельности студентов, показал следующее соответствие указанным критериям ФМГ:

- 50% заданий – полное соответствие;
- 33% заданий – частичное соответствие;
- 17% заданий – несоответствие ключевым критериям.

Наиболее успешные работы характеризовались грамотной интеграцией краеведческого материала, что повышало их реалистичность и мотивационный потенциал.

Так, одна из групп студентов разработала комплексное задание, посвящённое исследованию посещаемости туристических объектов Пермского края:

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Ученики 7 класса участвуют в краеведческом проекте по изучению туристической привлекательности объектов Пермского края. В таблице (табл. 6) они представили собранные данные о посещаемости трёх популярных мест за один из летних сезонов (92 дня: июнь, июль, август), а также выяснили, что в Кунгурской пещере из 78 дней с экскурсиями 25 дней проводились специализированные детские экскурсии, а в «Хохловке» зафиксировано 5 дней с очень высокой посещаемостью (более 400 человек), когда проводились фестивали.

Таблица 6.
Таблица к заданию группы студентов

Туристический объект	Всего посетителей за сезон	Дней с экскурсиями	Дней с посещаемостью более, чем 200 человек
Кунгурская ледяная пещера	12 450	78	45
Архитектурно-этнографический музей «Хохловка»	8 920	65	28
Горнолыжный комплекс «Губаха» (летний сезон)	6 150	52	18

Задание 1. Если случайным образом выбрать один летний день для посещения Кунгурской ледяной пещеры, какова вероятность того, что:

- а) в этот день будет проводиться экскурсия? (ответ округлите до сотых)
- б) в этот день будет проводиться именно детская экскурсия? (ответ округлите до сотых)

Задание 2. На основе представленных данных:

- а) рассчитайте среднее количество посетителей в день для каждого туристического объекта (ответ округлите до целых);
- б) сравните «стабильность» посещаемости объектов и выберите объект с наибольшей предсказуемой посещаемостью (обоснуйте, используя данные из таблицы)».

Разработанное задание демонстрирует сформированность ключевых действий, входящих в умение конструировать: выбор аутентичного краеведческого контекста, его математизацию (вероятность, статистика), формулировку вопросов на анализ данных. К каждому заданию указан объект оценки:

- задание 1: понимание классического определения вероятности; умение выделять благоприятные и всевозможные исходы в реальном контексте;
- задание 2: умение определять среднее арифметическое; способность анализировать частоту событий.

Среди ошибок в работах студентов отмечены такие: ситуации носят скорее учебный, чем реально-жизненный характер; текст задания перенасыщен историческими деталями, которые не несут непосредственной математической нагрузки; технические неточности и др.

Освоение профессиональной терминологии.

Полученные данные подтверждают выдвинутую гипотезу: зафиксирован рост понимания структуры ФМГ более чем на 30% и, главное, сформирована практическая способность у значительной доли (не менее 50%) участников конструировать диагностические задания, отвечающие критериям ФМГ.

Выводы

Разработан и теоретически обоснован образовательный интенсив как форма подготовки будущих учителей математики к конструированию диагностических материалов по ФМГ.

В результате пилотного исследования практически половина созданных студентами диагностических материалов полностью соответствовала критериям ФМГ, что

демонстрирует практическую результативность интенсива в формировании умения конструировать диагностические задания у будущих учителей.

Установлено, что использование краеведческого материала в качестве контекста для разработки заданий выступает значимым мотивационным и методическим фактором. Это способствует не только повышению вовлеченности студентов, но и достижению реалистичности и практической направленности создаваемых ими диагностических материалов.

Заключение

Проведённая работа, включающая теоретический анализ проблемы, разработку образовательного интенсива и его практическую реализацию в учебном процессе, показала перспективность выбранного подхода для формирования у будущих учителей математики компетенции в области конструирования диагностических заданий по ФМГ.

Следует отметить ограничения проведённого пилотного исследования: работа проводилась на выборке студентов одного университета, а оценка эффективности носила краткосрочный характер; интенсив был сфокусирован на одной содержательной области ФМГ, его эффективность для других тем требует отдельной проверки; краткосрочный формат интенсива, хотя и показал эффективность в формировании умения конструировать диагностические задания, не позволяет оценить устойчивость сформированного умения и его интеграцию в полноценную диагностическую деятельность. Эти ограничения задают направления для дальнейшей работы, которые видятся в следующем:

- апробация интенсива на других профилях подготовки и в других педагогических вузах;
- мониторинг применения сформированных компетенций выпускниками в ходе педагогической практики и их профессиональной деятельности;
- создание открытого электронного банка профессионально-ориентированных (в т.ч. краеведческих) диагностических заданий по ФМГ, а также адаптация формата для программ повышения квалификации учителей.

Таким образом, исследование демонстрирует возможность краткосрочных интенсивных форматов как эффективного ответа на вызовы модернизации педагогического образования и открывает пути для дальнейшего изучения их роли в формировании профессиональных компетенций.

Список литературы

- Азимов Э.Г., Щукин А.Н. Новый словарь методических терминов и понятий (теория и практика обучения языкам). М.: Издательство ИКАР, 2009.
- Басюк В.С., Ковалева Г.С. Инновационный проект Министерства просвещения «Мониторинг формирования функциональной грамотности»: основные направления и первые результаты // Отечественная и зарубежная педагогика. 2019. №4 (61). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/innovatsionnyy-proekt-ministerstva-prosvescheniya-monitoring-formirovaniya-funktsionalnoy-gramotnosti-osnovnye-napravleniya-i> (дата обращения: 05.10.2025).
- Борщевская А. Функциональная грамотность в контексте современного этапа развития образования // Наука и школа. 2021. №1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/funktsionalnaya-gramotnost-v-kontekste-sovremennogo-etapa-razvitiya-obrazovaniya> (дата обращения: 05.10.2025).
- Виноградова Н.Ф., Кочурова Е.Э., Кузнецова М.И. и др. Функциональная грамотность младшего школьника: книга для учителя / под ред. Н. Ф. Виноградовой. М.: Российский учебник: Вентана-Граф, 2018.
- Воронина Л.В., Хабибуллина О.Н. Формирование у младших школьников функциональной математической грамотности // Педагогическое образование в России. 2024. №1. URL:

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

- <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-u-mladshih-shkolnikov-funktsionalnoy-matematicheskoy-gramotnosti> (дата обращения: 05.10.2025).
- Гутник И.Ю. Роль педагогической диагностики в умении учителя решать профессиональные задачи // Известия ДГПУ. Психолого-педагогические науки. 2014. №1 (26). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/rol-pedagogicheskoy-dagnostiki-v-umenii-uchitelya-reshat-professionalnye-zadachi> (дата обращения: 26.12.2025).
- Десненко С.И., Зверева Е.Я. Подготовка будущего учителя математики к формированию у школьников математической грамотности // Ученые записки Забайкальского государственного университета. 2021. №5. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/podgotovka-buduschego-uchitelya-matematiki-k-formirovaniyu-u-shkolnikov-matematicheskoy-gramotnosti> (дата обращения: 29.09.2025).
- Дорофеева О.И. Критерии и показатели диагностической компетентности педагога // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2007. № Спецвыпуск. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kriterii-i-pokazateli-dagnosticheskoy-kompetentnosti-pedagoga> (дата обращения: 26.12.2025).
- Дударева Н.В., Утюмова Е.А. Модель формирования функционально-математической грамотности в процессе обучения математике // Педагогическое образование в России. 2021. № 4. С. 14–25. DOI: 10.26170/2079-8717_2021_04_02. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/model-formirovaniya-funktsionalno-matematicheskoy-gramotnosti-v-protssesse-obucheniya-matematike> (дата обращения: 10.12.2025).
- Ивutiна Е.П. Диагностическая компетентность и технология её формирования у студентов педагогических специальностей // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2007. Спецвыпуск. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/diagnosticheskaya-kompetentnost-i-tehnologiya-ee-formirovaniya-u-studentov-pedagogicheskikh-spetsialnostey> (дата обращения: 26.12.2025).
- Ковцун А.А., Кохичко А.Н. Научные подходы к понятию «функциональная грамотность» в педагогической теории и практике // Наука и школа. 2022. №6. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/nauchnye-podhody-k-ponyatiyu-funktsionalnaya-gramotnost-v-pedagogicheskoy-teorii-i-praktike> (дата обращения: 05.10.2025).
- Косикова С.В. Готовность будущих учителей к формированию функциональной грамотности младших школьников // Концепт. 2025. №8. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/gotovnost-buduschih-uchiteley-k-formirovaniyu-funktsionalnoy-gramotnosti-mladshih-shkolnikov> (дата обращения: 12.10.2025).
- Краснянская К.А., Рызде О.А. Математическая грамотность и условия её успешного формирования в 5-6-х классах // Отечественная и зарубежная педагогика. 2023. №1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskaya-gramotnost-i-usloviya-ee-uspeshnogo-formirovaniya-v-5-6-h-klassah> (дата обращения: 26.12.2025).
- Крылова Т.В., Тихонова Н.А., Шкунова А.А. Интенсивные технологии обучения в процессе подготовки специалистов в сфере сервиса // Проблемы современного педагогического образования. 2024. №84-1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/intensivnye-tehnologii-obucheniya-v-protssesse-podgotovki-spetsialistov-v-sfere-servisa> (дата обращения: 12.01.2026).
- Кузнецова Н.М. Функциональная грамотность. Концептуальная основа и возможности формирования: методическое пособие. Липецк: ГАУДПО ЛО «ИРО», 2021.
- Кутовая Н.В. Формирование диагностической компетентности будущих учителей в процессе профессиональной подготовки // Вестник БГУ. 2012. №1 (2). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-dagnosticheskoy-kompetentnosti-buduschih-uchiteley-v-protssesse-professionalnoy-podgotovki> (дата обращения: 01.10.2025).
- Леонтьев А.А. Педагогика здравого смысла. НПФ «Смысл», 2016.
- Методические рекомендации по формированию функциональной грамотности обучающихся 5-9 классов с использованием открытого банка заданий на цифровой платформе по

шести направлениям функциональной грамотности в учебном процессе и для проведения внутришкольного мониторинга формирования функциональной грамотности обучающихся / под ред. Г. С. Ковалевой. М: ФГБНУ «Институт стратегии развития образования РАО», 2022.

- Перовщикова Е.Н. Технология конструирования диагностических заданий в тестовой форме // Известия ВУЗов. Поволжский регион. Гуманитарные науки. 2014. №2 (30). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologiya-konstruirovaniya-diagnosticheskikh-zadaniy-v-testovoy-forme> (дата обращения: 02.10.2025).
- Перовщикова Е.Н., Бычков А.В. Методические аспекты формирования у студентов новых компетенций по разработке заданий для учащихся в рамках модульного подхода // Вестник Мининского университета. 2021. №1 (34). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-aspekty-formirovaniya-u-studentov-novykh-kompetentsiy-po-razrabotke-zadaniy-dlya-uchaschihsya-v-ramkah-modulnogo> (дата обращения: 04.10.2025).
- Перовщикова Е.Н., Бычков А.В. Освоение будущими учителями математики приемов формирования функциональной математической грамотности учащихся основной школы // Вестник ВятГУ. 2022. №4 (146). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/osvoenie-buduschimi-uchitelyami-matematiki-priemov-formirovaniya-funktsionalnoy-matematicheskoy-gramotnosti-uchaschihsya-osnovnoy> (дата обращения: 01.10.2025).
- Подлипский О.К. Функциональная грамотность как направление развития математического образования в школе // МНКО. 2020. №6 (85). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/funktsionalnaya-gramotnost-kak-napravlenie-razvitiya-matematicheskogo-obrazovaniya-v-shkole> (дата обращения: 05.10.2025).
- Попова Н.А. Образовательный интенсив как новый формат реализации проектного обучения // Современная высшая школа: инновационный аспект. 2020. №1 (47). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obrazovatelnyy-intensiv-kak-novyy-format-realizatsii-proektnogo-obucheniya> (дата обращения: 04.10.2025).
- Приказ Минтруда России от 18.10.2013 N 544н (ред. от 05.08.2016) "Об утверждении профессионального стандарта "Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)" (Зарегистрировано в Минюсте России 06.12.2013 N 30550). URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_155553/ (дата обращения: 04.10.2025).
- Рослова Л.О., Краснянская К.А., Квитко Е.С. Концептуальные основы формирования и оценки математической грамотности // Отечественная и зарубежная педагогика. 2019. №4 (61). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kontseptualnye-osnovy-formirovaniya-i-otsenki-matematicheskoy-gramotnosti> (дата обращения: 05.10.2025).
- Тетина С.В., Гутрова Ю.В. Совершенствование профессиональных компетенций учителя как готовности к формированию функциональной грамотности обучающихся // Профессиональное образование в России и за рубежом. 2024. №3 (55). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sovershenstvovanie-professionalnyh-kompetentsiy-uchitelya-kak-gotovnosti-k-formirovaniyu-funktsionalnoy-gramotnosti> (дата обращения: 25.12.2025).
- Федеральная рабочая программа основного общего образования «Математика» (базовый уровень) (для 5–9 классов образовательных организаций). URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2025/07/2025_ooo_frp_matematika-5-9_baza.pdf (дата обращения: 10.01.2026).
- Федеральная рабочая программа основного общего образования «Математика» (углублённый уровень) (для 7–9 классов образовательных организаций). URL:

https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2025/07/2025_ooo_frp_matematika-5-9_uql.pdf (дата обращения: 10.01.2026).

Функциональная грамотность в образовании: научно-методическое пособие; под ред. А.В. Хуторского. М.: Издательство Института образования человека, 2023. (Серия «Инновации в обучении»).

Özenç M., Çarkıt C. The Relationship between Functional Literacy and Problem-Solving Skills: A Study on 4th-Grade Students // Participatory Educational Research. 2021. Vol. 8, iss. 3. P. 372–384. <https://doi.org/10.17275/per.21.71.8.3>.

Информация об авторе

Лаптева Татьяна Дмитриевна; учитель MAOU «Гимназия №10» г. Перми (Российская Федерация, 614097, г. Пермь, Пермский край, ул. Подлесная, д. 25); E-mail: tanyal1998@mail.ru; ORCID: 0000-0003-3276-3793

EDUCATIONAL INTENSIVE AS A FORM OF TRAINING FUTURE TEACHERS IN CONSTRUCTING DIAGNOSTIC TASKS ON FUNCTIONAL MATHEMATICAL LITERACY

Lapteva T. D. | MAOU «Gymnasium №10» of Perm
teacher

Abstract. The relevance of this study stems from the need to develop competencies in future mathematics teachers in constructing diagnostic tasks on functional mathematical literacy (FML) in the absence of a dedicated course and a shortage of classroom hours. The purpose of the study is to develop and test an intensive educational course as a means of preparing future mathematics teachers to construct diagnostic tasks on FML for schoolchildren. The research methodology includes a primary experiment (ascertaining, formative, and control stages) using testing and expert analysis of students' learning activities. The pilot experiment revealed that the intensive educational program, built on the principles of activity-based and contextual approaches, as well as the use of local history materials, improved future teachers' understanding of the structure of the FML (component identification increased from 31% to 71%). According to expert evaluation, 50% of student projects fully met the key criteria of the FML, while another 33% demonstrated partial compliance. The scientific novelty lies in the substantiation and validation of the intensive educational program's content for the targeted development of future mathematics teachers' ability to construct diagnostic tasks. The practical significance lies in the provision of a ready-to-implement intensive program that can be integrated into pedagogical curricula.

Keywords: functional mathematical literacy, diagnostics, task design, teacher training, mathematics education, educational intensive

For citation: Lapteva T.D. (2026). Educational intensive as a form of training future teachers in constructing diagnostic tasks on functional mathematical literacy. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2 (42), 72–91. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-72-91

Copyright: © T. D. Lapteva (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Azimov, E. G., Shchukin, A. N. (2009). *Noviy slovar' metodicheskikh terminov I ponyatiy (teoriya I praktika obucheniya yazikam)*. Moscow: IKAR Publishing House. (In Russ.).
- Basyuk, V. S., Kovaleva, G. S. (2019). Innovative project of the ministry of education “monitoring of functional literacy development”: the main directions and the first results. *Domestic and foreign pedagogy*, 4(61). Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/innovatsionnyy-proekt-ministerstva-prosvescheniya-monitoring-formirovaniya-funktsionalnoy-gramotnosti-osnovnye-napravleniya-i> (In Russ., abstract in Eng.).
- Borshevskaya, A. (2021). Functional literacy in the context of the current stage of education development. *Science and School*, 1. Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/funktsionalnaya-gramotnost-v-kontekste-sovremennogo-etapa-razvitiya-obrazovaniya> (In Russ., abstract in Eng.).
- Desnenko, S. I., Zvereva, E. Ya. (2021). Preparing the Future Teacher of Mathematics to the Formation of Schoolchildren Mathematical Literacy. *Scholarly Notes of Transbaikal State University*, №5. Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/podgotovka-budushego-uchitelya-matematiki-k-formirovaniyu-u-shkolnikov-matematicheskoy-gramotnosti> (In Russ., abstract in Eng.).
- Dorofeeva, O. I. (2007). Kriterii i pokazateli diagnosticheskoy kompetentnosti pedagoga. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*, Special issue, 170-171. Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/kriterii-i-pokazateli-diagnosticheskoy-kompetentnosti-pedagoga>.
- Dudareva, N. V., Utyumova, E. A. (2021). Model Formation of Functional and Mathematical Literacy in the Process of Teaching Mathematics. *Pedagogical Education in Russia*, 4, 14-25. DOI: 10.26170/2079-8717_2021_04_02. Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/model-formirovaniya-funktsionalno-matematicheskoy-gramotnosti-v-protssesse-obucheniya-matematike> (In Russ., abstract in Eng.).
- Federal'naya rabochaya programma osnovnogo obshchego obrazovaniya «Matematika» (bazoviy uroven') (dlya 5-9 klassov obrazovatel'nih organizatsiy). Retrieved from: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2025/07/2025_ooo_frp_matematika-5-9_baza.pdf (In Russ.).
- Federal'naya rabochaya programma osnovnogo obshchego obrazovaniya «Matematika» (uglublenniy uroven') (dlya 7-9 klassov obrazovatel'nih organizatsiy). Retrieved from: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2025/07/2025_ooo_frp_matematika-5-9_ugl.pdf (In Russ.).
- Gutnik, I. Yu. (2014). The role of pedagogical diagnostics in the teachers' ability to solve professional problems. *Izvestia DGPU. Psychological and pedagogical sciences*, 1(26). Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/rol-pedagogicheskoy-diagnostiki-v-umenii-uchitelya-reshat-professionalnye-zadachi> (In Russ., abstract in Eng.).
- Ivutina, E. P. (2007). Diagnosticheskaya kompetentnost' i tehnologiya ee formirovaniya u studentov pedagogicheskikh special'nostey. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*, Special issue. Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/diagnosticheskaya-kompetentnost-i-tehnologiya-ee-formirovaniya-u-studentov-pedagogicheskikh-spetsialnostey>.
- Khutorskoy, A. V. (Ed.). (2023). *Funkcional'naya gramotnost' v obrazovanii: Scientific and Methodological Guide*. Moscow: Institute of Human Education Publishing House. (Series «Innovations in Learning»). (In Russ.).
- Kovtsun, A. A., Kokhichko, A. N. (2022). Academic approaches to the concept of “functional literacy” in pedagogical theory and practice. *Nauka i shkola*, 6, 99–109. DOI: 10.31862/1819-463X2022-6-99-109. (In Russ., abstract in Eng.).

- Kosikova, S. V. (2025). The readiness of preservice teachers for the development of functional literacy in primary school students. *Scientific-methodological electronic journal "Koncept"*, 08, 67–87. DOI: 10.24412/2304-120X-2025-11152. Retrieved from <https://ekoncept.ru/2025/251152.htm> (In Russ., abstract in Eng.).
- Krasnyanskaya, K. A., Rydze, O. A. (2023). Mathematical literacy and conditions of its successful formation in grades 5–6th. *Domestic and Foreign Pedagogy*, 2(1), 110–124. Retrieved from <https://doi.org/10.24412/2224-0772-2023-90-110-124>. (In Russ.).
- Krylova, T. V., Tikhonova, N. A., Shkunova, A. A. (2024). Intensive learning technologies in the training of service sector specialists. *Problems of Modern Pedagogical Education*, 84(1). Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/intensivnye-tehnologii-obucheniya-v-protssesse-podgotovki-spetsialistov-v-sfere-servisa> (date of access: 12.01.2026). (In Russ., abstract in Eng.).
- Kutovaya, N. V. (2012). Formation diagnostic competence of the future teachers in the course of vocational training. *The bryansk state university herald*, 1(2). Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-diagnosticheskoy-kompetentnosti-buduschih-uchiteley-v-protssesse-professionalnoy-podgotovki> (In Russ., abstract in Eng.).
- Kuznetsova, N. M. (2021). *Funkcional'naya gramotnost'. Konceptual'naya osnova I vozmozhnosti formirovaniya: metodicheskoe posobie*. Lipetsk: GUUDPO LO "IRO" (In Russ.).
- Leontiev, A. A. (2016). *Pedagogika zdravogo smisla*. Moscow: Smysl. (In Russ.).
- Metodicheskie rekomendacii po formirovaniyu funkcional'noj gramotnosti obuchayushchihnya 5-9 klassov s ispol'zovaniem otkrytogo banka zadaniy na cifrovoj platforme po shesti napravlenij funkcional'noj gramotnosti v uchebnom processe i dlya provedeniya vnutrishkol'nogo monitoringa formirovaniya funkcional'noj gramotnosti obuchayushchihnya (2022). [Methodological recommendations for the formation of functional literacy among students of grades 5-9 using an open bank of tasks on a digital platform in six areas of functional literacy in the educational process and for conducting intra-school monitoring of the formation of students' functional literacy]. Kovaleva, G. S. (Ed.). Moscow: FGBNU "Institute for Education Development Strategy of the Russian Academy of Education". (In Russ.).
- Perevoshchikova, E. N. (2014). Technology of diagnostic testing design. *Volga region. Humanities*, 2(30). Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/tehnologiya-konstruirovaniya-diagnosticheskikh-zadaniy-v-testovoy-forme> (In Russ., abstract in Eng.).
- Perevoshchikova, E. N., Bychkov, A. V. (2021). Methodical aspects of the formation of new competencies in students for the development of tasks for students within the framework of a modular approach. *Vestnik of Minin University*, 9(1). Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-aspekty-formirovaniya-u-studentov-novyh-kompetentsiy-po-razrabotke-zadaniy-dlya-uchaschihsya-v-ramkah-modulnogo> (In Russ., abstract in Eng.).
- Perevoshchikova, E. N., Bychkov, A. V. (2022). Mastering by future mathematics teachers of techniques for the formation of functional mathematical literacy of primary school students. *Herald of Vyatka State University*, 4(146). Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/osvoenie-buduschimi-uchitelyami-matematiki-priemov-formirovaniya-funktsionalnoy-matematicheskoy-gramotnosti-uchaschihsya-osnovnoy> (In Russ., abstract in Eng.).
- Podlipskii, O. K. (2020). Functional literacy as a direction for the development of mathematics education at school. *The world of science, culture, education*, 6(85). Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/funktsionalnaya-gramotnost-kak-napravlenie-razvitiya-matematicheskogo-obrazovaniya-v-shkole> (In Russ., abstract in Eng.).
- Popova, N. A. (2020). Educational intensive as a new format of project learning. *Contemporary Higher Education: Innovative Aspects*, 12(1), 149-156. DOI: 10.7442/2071-9620-2020-12-1-149-156 (In Russ., abstract in Eng.).

- Prikaz Mintruda Rossii ot 18.10.2013 N 544n (red. ot 05.08.2016) "Ob utverzhdenii professional'nogo standarta "Pedagog (pedagogicheskaya deyatel'nost' v sfere doskol'nogo, nachal'nogo obschego, osnovnogo obschego, srednego obschego obrazovaniya) (vospitatel', uchitel')" (Zaregistrovano v Minuste Rossii 06.12.2013 N 30550). Retrieved from https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_155553.
- Roslova, L. O., Krasnyanskaya, K. A., Kvitko, E. S. (2019). Conceptual bases of formation and assessment of mathematical literacy. *Domestic and foreign pedagogy*, 4(61). Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/kontseptualnye-osnovy-formirovaniya-i-otsenki-matematicheskoy-gramotnosti> (In Russ., abstract in Eng.).
- Tetina, S. V., Gutrova, Yu. V. (2024). Improvement of professional competencies of a teacher as readiness for the formation of functional literacy of students. *Professional Education in Russia and Abroad*, 3(55). Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/sovershenstvovanie-professionalnyh-kompetentsiy-uchitelya-kak-gotvnosti-k-formirovaniyu-funktsionalnoy-gramotnosti> (In Russ., abstract in Eng.).
- Vinogradova, N. F., Kochurova, E. E., Kuznetsova, M. I. and others (2018). *Funkcional'naya gramotnost' mladshego shkol'nika: kniga dlya uchitelya*. Moscow: Russian textbook: Ventana-Graf. (In Russ.).
- Voronina, L. V., Khabibullina, O. N. (2024). Formation of Primary School Children Functional Mathematical Literacy. *Pedagogical Education in Russia*, 1, 54–64. Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-u-mladshih-shkolnikov-funktsionalnoy-matematicheskoy-gramotnosti> (In Russ., abstract in Eng.).
- Özenç, M., Çarkıt, C. (2021). The Relationship between Functional Literacy and Problem-Solving Skills: A Study on 4th-Grade Students. *Participatory Educational Research*, 8(3), 372–384. Retrieved from <https://doi.org/10.17275/per.21.71.8.3>.

Information about the author

Tatyana D. Lapteva; Teacher MAOU «Gymnasium №10» of Perm (Podlesnaya Street, 25, Perm, Perm Region, 614097, Russian Federation); E-mail: tanyal1998@mail.ru; ORCID: 0000-0003-3276-3793

Статья поступила в редакцию	22.01.2026
Принята к публикации	10.02.2026
Статья опубликована	19.06.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-92-104

УДК
378.147:372.851 | **КРЕАТИВНОСТЬ ЛИЧНОСТИ КАК МОДУС
ВЫРАЖЕННОСТИ ЭПИСТЕМОЛОГИИ ФУНДИРОВАНИЯ
ФРАКТАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ**

Смирнов Евгений Иванович
д.п.н., профессор,
ведущий научный сотрудник

Дворяткина Светлана Николаевна
д.п.н., доцент

Тихомиров Сергей Александрович
к.ф.-м.н., доцент

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского;
Южный математический институт – филиал
Владикавказского научного центра
РАН

Елецкий государственный университет
им. И.А. Бунина

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

Аннотация. В статье рассматривается проблема взаимосвязи креативности личности и процесса познания сложных систем в контексте современной сложностной парадигмы мышления. Авторы исходят из того, что традиционное отождествление креативности с высоким уровнем интеллекта является недостаточным. Проявление творческих способностей требует преодоления стереотипов, включения интуитивных и логических уровней мышления, а также особых личностных качеств. В качестве ключевого механизма, актуализирующего креативность, предлагается эпистемология фундирования фрактальной сложности — процесс поэтапного вскрытия сущности исследуемых объектов через фрактальные самоподобные структуры, бифуркационные переходы и синергетические эффекты. Теоретически обосновано, что фрактальная сложность создаёт преграды для понимания, повышает мотивацию и служит фактор-импульсом самоорганизации мышления. Эмпирическая часть статьи демонстрирует реализацию предложенного подхода на двух примерах: исследование цилиндра (сапога) Шварца, приводящее к построению фрактального «кубка Шварца», и кластерное фундирование понятия меры Хаусдорфа, объединяющее длину, площадь и объём. Показано, что решение многоэтапных математико-информационных заданий средствами компьютерного и математического моделирования не только раскрывает сущность базовых математических конструктов, но и выступает модусом выраженности креативности, дивергентного мышления и инновационности обучающихся.

Ключевые слова: фрактальная сложность, математическое и компьютерное моделирование, фундирование, креативность личности

Для цитирования: Смирнов Е.И., Дворяткина С.Н., Тихомиров С.А. Креативность личности как модус выраженности эпистемологии фундирования фрактальной сложности // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 2 (42). С. 92–104. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-92-104

Права: © Е.И. Смирнов, С.Н. Дворяткина, С.А. Тихомиров (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Последние десятилетия показали, что развитие мыслительных операций, когнитивных схем, абстрактного мышления, логических актов (интеллект) является важнейшей, но не ключевой характеристикой креативности личности. При этом в настоящее время интеллект рассматривается как общая умственная способность обобщения поведенческих характеристик, связанная с успешной адаптацией к новым жизненным условиям: подход, ведущий своё начало от Ж. Пиаже (Катков, 2020). Суть креативности личности по С. Меднику не в особенности операциональных действий, а в способности преодолевать стереотипы на конечном этапе мыслительного синтеза и в широте поля ассоциаций (Богоявленская, 1981). Можно сказать, что ряд учёных выявили положительную корреляцию между показателями креативности и интеллекта (Дж. Гилфорд, Е.П. Торренс и др.), а психологи Д. Векслер, Г. Айзенк, Л. Термен, Р. Стернберг рассматривали креативность и интеллект как единую человеческую способность к эффективной мыслительной деятельности. В.Н. Дружинин считал, что креативность личности есть производное интеллекта: высокий интеллект предполагает высокие творческие способности, а низкий — препятствует творчеству. Однако, теория порога (или «теория ветвления») предполагает, что для проявления креативности необходим определённый пороговый уровень развития интеллекта. До этого уровня креативность и интеллектуальность связаны, но выше определённого порога креативность становится независимой переменной. По разным данным, критический уровень интеллекта, после которого связь с креативностью ослабевает или исчезает, составляет от 115 до 120 баллов IQ (Shi, 2017). Психолог Я.А. Пономарев разводил понятия творчества и высокого уровня развития интеллекта. Он отождествлял творчество с выработкой побочных продуктов деятельности — новых нестандартных идей, возникающих в ходе творческого процесса (Селиванов, 2006). Именно, акт проявления креативности требует задействованности всего мышления, всех его уровней (от логического до интуитивного), включения в этот процесс многих сторон психологической организации субъекта. Ряд психологов (А. Маслоу, Д.Б. Богоявленская, А. Олох) считали, что проявление креативности личности больше определяется особыми чертами личности (любопытностью, рискованностью и т. п.), чем способностями (Иванова, 2021).

В то же время проявление креативности личности тесно связано со сложностью исследуемых объектов и процессов. Именно, в ходе реализации сложностной парадигмы мышления (Э. Морен, Ж. Делез, К. Майнцер, В.Г. Буданов, Т.В. Черниговская и др.) наблюдается переход от хаоса к порядку, проявление синергетических эффектов (точки бифуркации, аттракторы, флуктуации, бассейны притяжения), появление побочных продуктов исследования, выход обучающегося на эффекты понимания и вскрытия сущности исследуемого (Буданов, 2018). Одним из механизмов вскрытия эпистемологии существенных связей объекта или процесса исследования является фрактальная сложность как механизм вскрытия сущности (возможно, на основе постпозитивистских концепций науки и метода фальсификации К. Поппера, Т. Куна, И. Лакатоса, П. Фейерабенда) (Порус, 2010). Именно, на стыке логического и интуитивного в этапах фундирования фрактальной сложности в движении к сущности начинает эффективно проявляться креативность личности.

Таким образом, актуальность исследования обусловлена необходимостью преодоления недостаточности традиционных интеллектуальных моделей креативности и поиском механизмов, связывающих творческое мышление с процессами познания фрактально-сложных сред. Проблематика заключается в том, что до сих пор остаётся нераскрытым, каким образом эпистемология фундирования фрактальной сложности может выступать модусом выраженности креативности, дивергентного мышления и инновационности обучающихся. *Цель данной статьи* — теоретически обосновать и эмпирически верифицировать модель креативности личности как модуса выраженности эпистемологии фундирования фрактальной сложности, а также выявить когнитивные и дидактические условия, при которых поэтапное вскрытие сущности сложных

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

математических и информационных объектов (на примере цилиндра Шварца и меры Хаусдорфа) актуализирует творческое мышление, дивергентные способности и инновационность обучающихся.

Материалы и методы

Сложная фрактальная деятельность самоподобия, нахождение фрактального события («проблемной зоны») вдали от точки равновесия создают возможность для скачкообразных бифуркационных переходов. Это запускает фактор-импульсы самоорганизации мыслительной деятельности обучающегося. В данном процессе выделяются следующие базисные факторы влияния сложности фрактальных систем и знаний:

– *фактор рефлексии сущности*. Сложность фрактала заставляет задуматься о его природе, а не только о формальных операциях над объектом. Задача педагога — создавать условия и показать, как фрактальная сложность рождается из простоты (Э. Морен, К. Майнцер, Г. Хакен, Е.И. Смирнов, В.С. Секованов и др.);

– *фактор холизма и междисциплинарности*. Фрактальная сложность всегда коррелирует с целостностью (холизмом) объекта, что выводит на междисциплинарность, цифровизацию и актуальные научные достижения (В. Ганзен, А.Л. Семенов, С.Н. Дворяткина и др.);

– *фактор фундирования опыта личности*. Фрактальная сложность интегрирует знания из разных областей и позволяет выстраивать этапы движения к сущности через фундирование опыта личности (В.Д. Шадриков, Е.И. Смирнов, Р.М. Зайниев и др.);

– *фактор мотивации*. Фрактальная сложность создаёт когнитивные преграды, повышает мотивацию и формирует основу для самоорганизации и развития мышления (синергия и наглядное моделирование – А.Н. Леонтьев, В.А. Запорожец, А. Маслоу, Е.И. Смирнов и др.), выступая фактор-импульсом для развития креативности личности.

Как отмечали Л.С. Выготский, А.Н. Леонтьев, В.А. Запорожец, сложная деятельность служит механизмом перехода от состояния неопределённости (дефицита, хаоса, проблемной ситуации) к новому уровню организации деятельности и структуры результата, выявления его сущности (Морен, 2019). При этом наблюдается аналогия с синергетикой: как в физических системах энергия извне запускает формирование структуры, так и в педагогике и образовании сложная деятельность (совместная, учебная, игровая) служит источником упорядочивания психических процессов, компенсации академических дефицитов. Эпистемология сложности достаточно разнообразна и изучается в различных науках (рис. 1), однако в настоящем исследовании будет сделан упор на фрактальной сложности.

Определим фрактальную сложность как феномен и механизм возникновения бифуркационных переходов в исследовании объектов или процессов вдали от равновесия и при наличии процессов самоорганизации и самоподобия. Она характеризует скачкообразные изменения вблизи точки бифуркации, а также возможность генерации предельного объекта с фрактальной размерностью.

Фракталы и фрактальная сложность естественно возникают при их генерации методом симбиоза математического и компьютерного моделирования (например, множества Мандельброта и Жюлиа, «салфетка» Серпинского и «снежинка» Коха, кривая Ван-дер-Вардена и цилиндр Шварца) (Секованов, 2016). При этом фрактальная сложность нередко связывается с фундированием сущности математических понятий или процессов — например, как проблема классов недифференцируемых ни в одной точке непрерывных функций, актуализирующаяся фрактальными контрпримерами Тагаки, Вейерштрасса, Ван-дер-Вардена и др., а также построением итерационных процессов, фундирующих сущность недифференцируемости (Сысуева, 2024).

Аналогично, «сапог» или цилиндр Шварца (Смирнов, 2024) — конструкции многогранных триангуляций боковой поверхности которого с проявлением точек бифуркации — позволили сформулировать научное определение понятия площади поверхности. При этом математический анализ продвижения к сущности на основе

компьютерного моделирования позволил выявить закономерности роста многогранных поверхностей, подобные сценарию Ферхюльста (Смирнов, 2016).

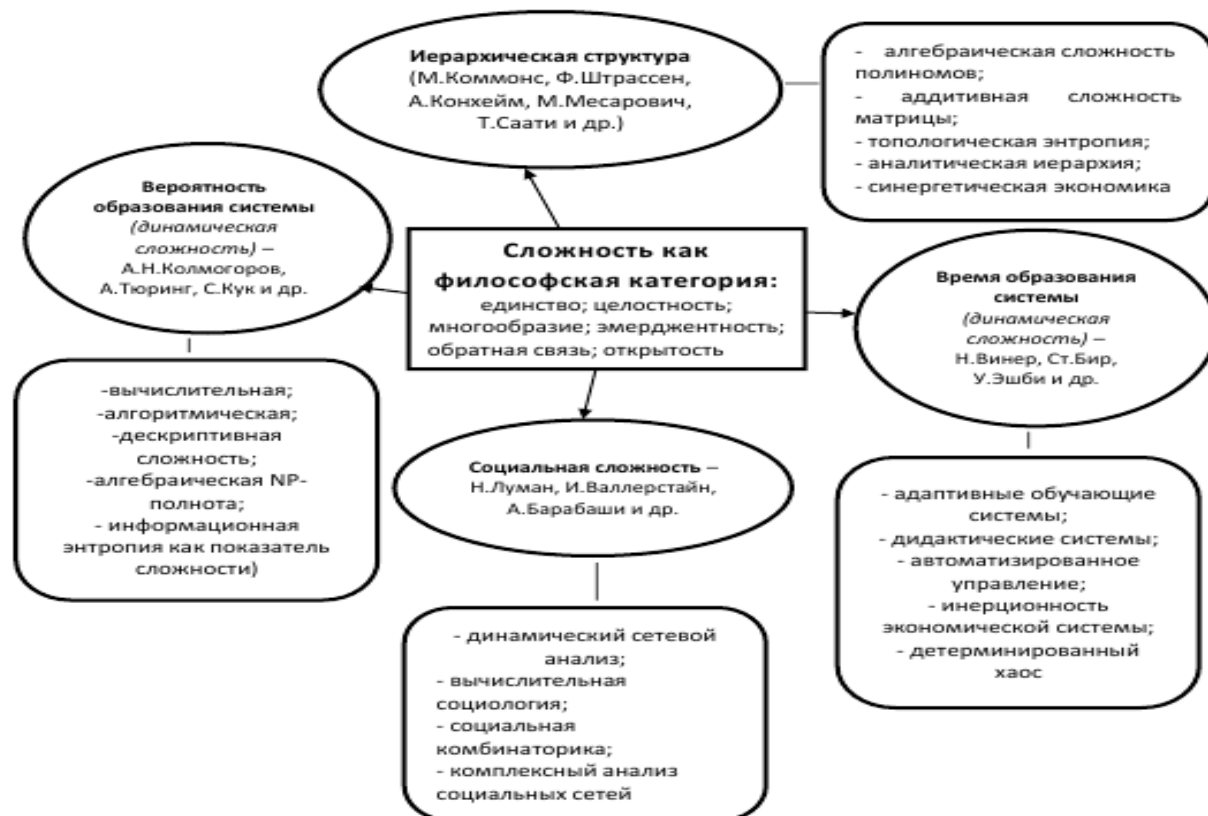


Рис. 1. Феномен сложности в философских, математических, естественно-научных и социальных науках

Фрактальная сложность проявляется в поведении и развитии параметров динамической системы, где всегда есть доля неопределённости и непредсказуемости. Она требует множественности описаний и гибкости решений как в содержании этапов продвижения к сущности, так и в когнитивных процессах нестандартности мышления и получения побочных продуктов. Не менее эффективным инструментом является при этом построение эмпирических обобщений, исследование которых невозможно без использования компьютерного и математического моделирования (Fatahi, 2019). В то же время необходимы разнообразные поисковые пробы (экспериментальные срезы, сравнительный анализ конкретных проявлений, компьютерное моделирование, аналогии, анализ через синтез и т. п.).

Базовым понятием представленной эпистемологии фрактальной сложности является понятие фундирования знаниевых конструктов. Сам философский феномен фундирования активно осмыслялся великими философами XX века Э. Гуссерлем и М. Хайдегером.

Э. Гуссерль определяет отношение фундирования следующим образом (Смирнов, 2012): *А фундировано посредством В, если для существования А сущностно необходимо В, только в единстве, с которым А может существовать.* Отношение фундирования может быть односторонним (*А* фундировано в *В*) или двухсторонним (*А* и *В* фундированы друг в друге). Согласно феноменологическому учению, все комплексные высокоуровневые акты и предметности фундированы в изначальных простых актах и предметах.

Фундирование в работах Э. Гуссерля и М. Хайдеггера связано с вопросами основания, структуры и взаимосвязи различных уровней реальности или познания. При этом они по-разному трактовали феномен фундирования в контексте своих философских концепций. У Э. Гуссерля фундирование — это логическая и трансцендентальная процедура. Сознание

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

через свои акты создаёт условия для данности объектов и наук, а механизмы связаны с интенциональностью и редукциями. У М. Хайдеггера фундирование — это онтологический процесс. Бытие *Dasein* задаёт горизонт, в котором вообще возможно какое-либо понимание и познание, а механизмы опираются на экзистенциалы и временность. Э. Гуссерль также различал уровни фундирования, где более общие сущности (например, категории или эйдетические единицы) фундируют более конкретные, а иерархия строится мереологически — через отношение «части» и «целого».

В педагогику впервые понятие фундирования было введено В.Д. Шадриковым и Е.И. Смирновым в 2002 году как процесс создания условий для поэтапного углубления и расширения школьных знаний в направлении освоения обобщённого конструкта сложного знания, а также как процесс личностного выбора, развития интеллекта и креативности личности.

В педагогической психологии выявлен целый ряд условий, которые способствуют развитию креативности личности в процессе инновационной деятельности (Смирнов, 2012):

- наличие творческой среды (стимулирование ситуации успеха; толерантность к неопределённости; готовность к дискуссиям и множественности решений проблемы; выявление и популяризация образцов творческого поведения и его результатов);

- низкая степень регламентации поведения и наличие предметно-информационной обогащённости;

- информационно-технологическая поддержка и компьютерный дизайн математической деятельности обучающихся на всех этапах проявления синергетических эффектов и сущности «проблемной зоны».

Далее будет показано, каким образом конкретизация эпистемологии фундирования фрактальной сложности как методический феномен не только приводит к развитию креативности личности, но и может определять постановку проблем математического и философского уровня. Это представляется естественным актом синергетических взаимодействий. Однако математическое знание является первичным по отношению к методике, и в то же время последняя может быть фактором влияния на предмет.

Результаты

Проявление эпистемологии фундирования фрактальной сложности будет в дальнейшем продемонстрировано на двух примерах:

- вскрытие *сущности понятия площади поверхности* посредством метода фальсификации К. Поппера, применённого к цилиндру Шварца; при этом находятся точки бифуркации и закономерности роста площадей многогранных поверхностей (в том числе, к бесконечности) триангуляций боковой поверхности цилиндра как появления фрактальной сложности и креативности обучающихся. При этом будет построен «кубок Шварца» как уникальный фрактальный конструкт (Смирнов, 2017);

- эпистемология фрактальной сложности *меры и размерности Хаусдорфа* (Иванов, 2018) как процесс построения кластера фундирования понятия меры, выраженной в обобщённом конструкте сущности процессов измерения длин, площадей и объёмов с одной стороны, и длин кривых и площадей поверхностей с другой. Представленные фундирующие конструкты интерпретации излагаются впервые.

1. Множественное целеполагание процессов определения «*площади*» боковой поверхности цилиндра или «*сапога*» Шварца как контрпримера некорректного подхода к понятию площади поверхности Ж. Серра (содержательный аспект): патологические свойства «площади» боковой поверхности цилиндра Шварца хорошо изучены в так называемом «регулярном» случае (см., например, (Фихтенгольц, 2001)). При этом высота H цилиндра разбивается на m равных частей (соответственно – слоёв цилиндра), а окружность сечения делится на n равных частей с последующим сдвигом φ на каждом слое на $\frac{\pi}{n}$. Тогда формула для вычисления многогранной поверхности аппроксимации «площади» боковой поверхности цилиндра при $m, n \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$S = 2\pi R \sqrt{R^2 \frac{\pi^4}{4} q^2 + H^2}, \quad q = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2}. \quad (1)$$

При этом, когда $m, n \rightarrow \infty$ результат предельного процесса становится неоднозначным, а поиск закономерностей роста площадей становится подобным фрактальным структурам. Б. Мандельброт показал, что при $m = n^k$ площадь многогранной поверхности растёт как n^k ($k \neq 2$) (Мандельброт, 2002). Возникают иерархии многоэтапных математико-информационных заданий, связанных с исследованием многогранных поверхностей цилиндра Шварца и решаемых средствами компьютерного и математического моделирования. Однако рассматриваемая параметризация вычислительных процессов может приводить к парадоксальным результатам.

Пусть в окружность с центром в точке A и радиусом 1 вписан правильный n -угольник и проведён радиус AT так, что AT пересекает сторону n -угольника в точке U . Тогда нетрудно определить функцию $f_n(\alpha)$ от центрального угла α , определяемого положением точки T . Действительно, обозначим через $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$ центральный угол вписанного n -угольника, тогда $f_n(\alpha)$ примет вид:

$$f_n(\alpha) = 1 - \frac{\sin(90^\circ - \frac{\varphi}{2})}{\sin(90^\circ + \frac{\varphi}{2} - (\alpha - [\frac{\alpha}{\varphi}] \cdot \varphi))}. \quad (2)$$

Определим теперь функцию $g(\alpha)$ как сходящийся функциональный ряд:

$$g(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{k \cdot n}(\alpha), \quad (3)$$

где функции $f_{k \cdot n}(\alpha)$ определяются формулой (2) при $k = 3$. Легко видеть, что график функции $g(\alpha)$ имеет фрактальную структуру, наподобие графика функции Ван-дер-Вардена (Smirnov, 2025). Теперь рассмотрим слой цилиндра Шварца, пересечённый плоскостью ортогональной его оси. Возникает естественная задача: если провести сечение перпендикулярное оси цилиндра через произвольную точку x на ней при n стремящемся к бесконечности, а t фиксировано, то какой вид будет иметь функция $g(\alpha)$, а также соответствующая фрактальная поверхность, определённая в формуле (3)?

На ряд, определяемый формулой (3), можно смотреть как на функцию двух переменных $s(\alpha, x)$, если предположить, что переменные α и x независимы. Графиком этой функции будет поверхность (очевидно, фрактальная; кстати, неизвестна ни её площадь в рамках одного слоя, ни фрактальные размерности поверхности и кривых в сечении). На следующем рисунке изображена часть поверхности $z = s(\alpha, x)$, при этом $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ и $0 < x < 1/m$. Полагаем, что высота одного слоя цилиндра Шварца равна $1/m$ (для наглядности поверхность изображена в цилиндрической системе координат). На следующем рис. 2 линии уровня, изображённые жёлтым цветом, соответствуют графикам функции $g(\alpha)$ в полярной системе координат при $x = 0$, $x = 1/3m$, $x = 2/3m$, $x = 1/m$ и представляют собой фрактальные кривые, размерность которых, равно как и площадь внутри кривой, пока не исследованы.

Но если теперь и t устремить к бесконечности, то фрактальная боковая поверхность выравнивается, с образующей параллельной оси цилиндра, и полученный рисунок «кубка Шварца» внутри цилиндра уже не зависит ни от t , ни от n , а только от радиуса и высоты цилиндра. Опять же неизвестен ни объём «кубка Шварца», ни площадь его боковой поверхности (рис. 3).

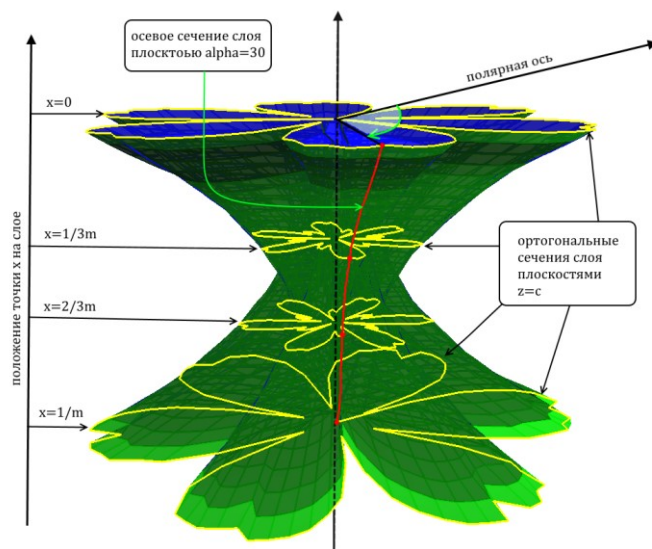


Рис. 2. «Кубок Шварца» как побочный продукт исследования цилиндра Шварца

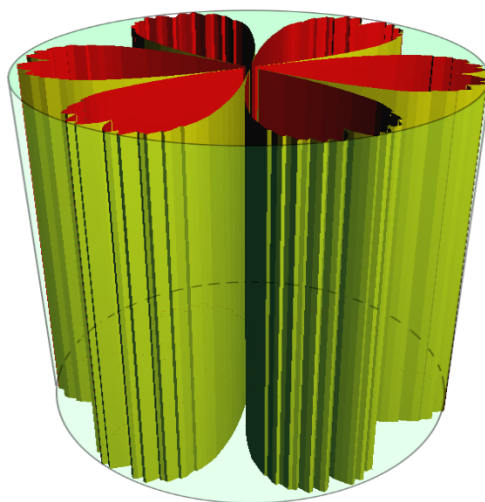


Рис. 3. «Кубок Шварца» с параметрами только радиуса и высоты

Таким образом, получается, что креативности личности способствует освоение сложных систем и знаний – оно даёт явный мотивационно окрашенный синергетический эффект, способно удовлетворить интересы и личностные предпочтения каждого обучающегося, при этом высока вероятность появления побочного продукта исследования. Данный процесс тестирует гибкость мышления, нестандартность подхода и инновационность результатов с естественной вариативностью не только в области фрактальной геометрии, но и в методико-философской трактовке феномена.

2. Классическое определение площади поверхности (А. Лебег, Г. Минковский, начало XX века) основано на параметризации точек поверхности Γ координатами (u, v) так, что: $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, $(u, v) \in V \subset \mathbb{R}^2$, где функции $\phi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в области V , а также имеет место формула

$$\mathbf{r}(u, v) = \phi(u, v) \mathbf{i} + \psi(u, v) \mathbf{j} + \chi(u, v) \mathbf{k}, \quad (u, v) \in V \subset \mathbb{R}^2.$$

Пусть гладкая поверхность Γ разбивается кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Γ_i , $d_i := \text{diam } \Gamma_i$. Выберем на каждой части Γ_i точку M_i и построим в каждой такой точке касательную плоскость α_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Ясно, что каждая α_i натянута на векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v . Спроектируем каждую область Γ_i на соответствующую ей касательную плоскость α_i . Пусть S_i – площади этих плоских областей. Обозначим за $\mathcal{B}(\delta)$ направленное и частично упорядоченное множество разбиений $\delta = (M_1, M_2, \dots, M_n)$ и назовём площадью поверхности Γ предел интегральных сумм $S_\delta = \sum S_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) по фильтру $\mathcal{B}(\delta)$:

$$S = \lim_{\mathcal{B}(\delta)} S_\delta.$$

При вычислении предела интегральных сумм получаем $S = \iint_V |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| du dv$, где по формуле Лагранжа: $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = r_u^2 r_v^2 - (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$.

Интересно отметить, что длина, площадь и объём укладываются в схему меры Лебега как обобщённой неотрицательной счётно аддитивной функции множества, поскольку мера Лебега обобщает понятия длины отрезка, площади фигуры и объёма тела на произвольное n -мерное евклидово пространство. Однако длина кривой и площадь поверхности имеют некоторые особенности, которые отличают их от классической меры Лебега, хотя они также обладают свойствами аддитивности и неотрицательности (в то же время длина кривой может рассматриваться как функционал на топологическом пространстве функций, не являющийся, вообще говоря, непрерывным). Эти величины связаны с геометрическими объектами и их параметризацией, а не с мерой множеств в пространстве.

Для учителя математики в его фундаментальной профессиональной подготовке совершенно необходимо доводить частные случаи проявления базового школьного феномена (в нашем случае, площадь поверхности) до его сущности. Но таковой не было в рассмотренном выше аспекте, пока в 1918 году немецким математиком Феликсом Хаусдорфом не была введена мера Хаусдорфа. Для s -мерной поверхности в метрическом пространстве s -мерная мера Хаусдорфа H^s обобщает понятия длины, площади и объёма. Например, в случае гладкой поверхности в \mathbb{R}^3 её 2-мерная мера Хаусдорфа H^2 совпадает с классической площадью. Таким образом, H^1 совпадает с длиной кривой, H^2 совпадает с площадью поверхности, а H^n совпадает с мерой Лебега в \mathbb{R}^n . Пусть s – неотрицательное число. Для любого $\delta > 0$ определим величину

$$H_\delta^s(F) = \inf_{\mathcal{F}} \left\{ \sum \|U_j\|^s : \{U_j\} - \delta \text{-покрытие } F \right\}.$$

Если теперь обозначить через $H_s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$, то такой предел существует для любого подмножества $F \subset \mathbb{R}^n$. Величина $H_s(F)$ называется s -мерной хаусдорфовой мерой \mathcal{F} (Иванов, 2018).

Таким образом, возможно построить кластер фундирования понятия «площадь поверхности», представляющий модель обобщённой сущности школьного феномена.

Ближайшая задача – выстроить онтологический дизайн поэтапного продвижения к сущности понятия меры множества как обобщённого конструкта мер длины, площади, объёма, длин дуг и площадей поверхностей в \mathbb{R}^3 , что и осуществлено на рис. 4.

Однако для того, чтобы сформировать у обучающегося научное содержание и сущность понятия меры (в нашем случае площади поверхности) требуется определённая математико-цифровая подготовка и эффективные практики исследования и вычисления площадей поверхностей. При этом используется педагогический опыт развития креативности личности (М. Клякля, В.С. Секованов, Е.И. Смирнов, С.Н. Дворяткина (Dvoryatkina, 2017) и др.) в ходе исследования и решения многоэтапных математико-информационных заданий в контексте исследуемой проблемы. Более реальной практикой следует считать эмпирический путь исследования «проблемной зоны» современных достижений в науке (фрактальная геометрия, теория кодирования и шифрования

**ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

информации, нечёткие множества и fuzzy logic, клеточные автоматы и др.), особенно для школьников, и то в рамках поисковой и исследовательской деятельности. При этом креативность личности, развитое дивергентное мышление являются необходимым механизмом вскрытия сущности средствами фундирующих конструкторов когнитивной деятельности.

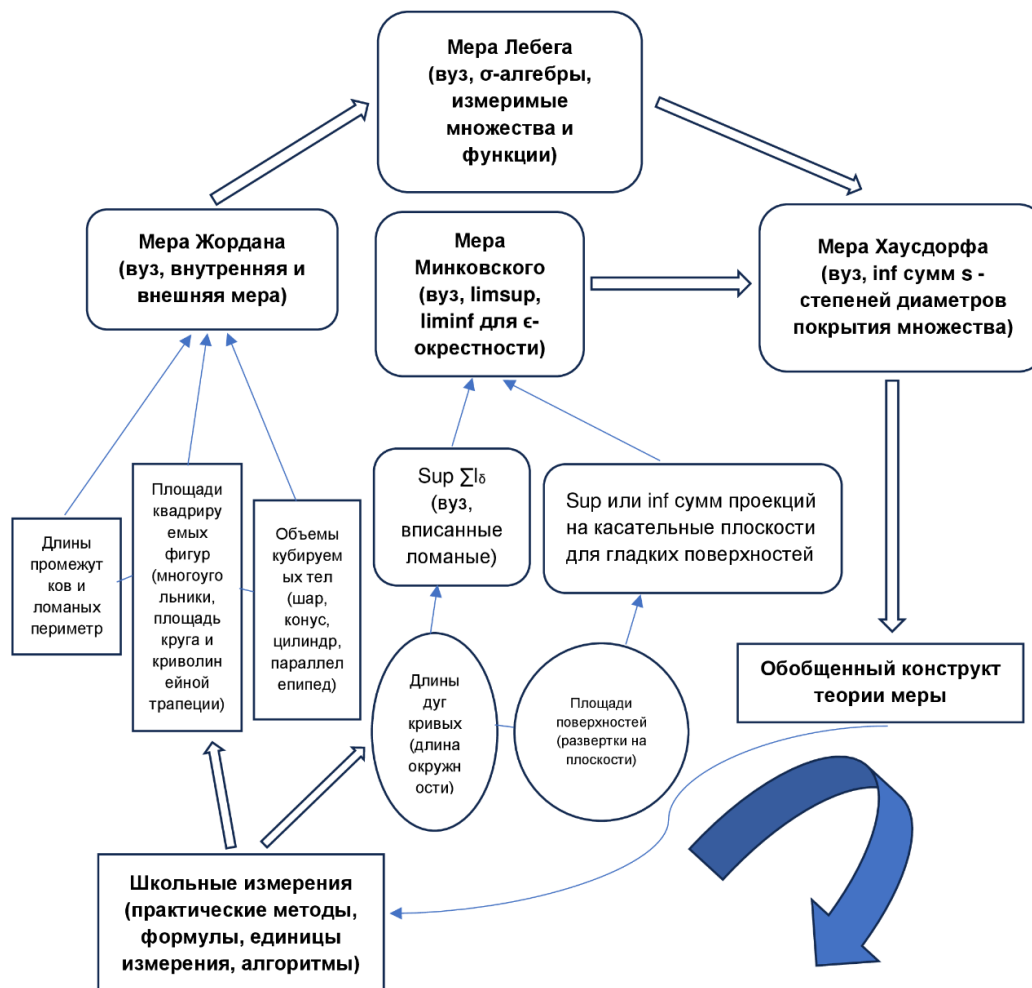


Рис. 4. Онтологический дизайн кластера фундирования понятия меры

Заключение

В основе развития креативности личности лежит освоение сложных систем и знаний, которое, как правило, актуализируется при стремлении вскрыть существенные связи исследуемого объекта. Глубокие и разносторонние знания в различных областях, объединённые единой проблемной зоной и целеполаганием, создают основу для становления креативного мышления обучающегося.

Чем большим объёмом информации и опыта исследовательской деятельности располагает личность, чем сильнее выраженность личностных качеств, тем больше возможностей для комбинирования, трансформации и создания новых идей в выбранном направлении. Освоение сложных систем и знаний позволяет видеть больше связей, вариантов и возможностей для решения проблем, что является ключевым для развития дивергентного мышления или по Дж. Гилфорду – развитию креативности мышления.

Опыт освоения сложных систем и знаний развивает умение действовать в неопределённых ситуациях, требует умения анализировать, планировать, рефлексировать и контролировать процесс обучения, что является важными характеристиками креативности личности. Самое существенное заключается в том, что развитие креативности личности при

освоении сложных систем и знаний необходимо коррелирует с эффектом преодоления трудностей, что, в свою очередь, способствует формированию интеллектуальных операций мыслительной деятельности.

Список литературы

- Богоявленская Д.Б. Пути к творчеству. М.: Знание, 1981.
- Буданов В.Г., Аршинов В.И., Лепский В.Е., Свирский Я.И. Сложность и проблема единства знания. Вып. 1: К стратегии познания сложности. М.: ИФ РАН, 2018.
- Иванов А.О., Тужилин А.А. Геометрическая теория меры. Часть 1. Учебное пособие. М.: Изд-во Попечительского совета механико-математического факультета МГУ. 2018.
- Иванова В.А. Исследование творческого мышления в отечественной психологии // Молодой учёный. 2021. №4 (346). С. 129–132.
- Катков А.Л. Эпистемологический смысл психологического кризиса // Профессиональная психотерапевтическая газета. 2020. № 11. С. 12–25.
- Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы. Пер. с англ. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
- Морен Э. О сложности. М.: Институт общегуманитарных исследований, 2019.
- Порус В.Н. Постпозитивизм. Новая философская энциклопедия в 4 т. Пред. науч.-ред. совета В.С. Стёпин. 2-е изд., испр. и доп. М.: Мысль, 2010.
- Секованов В.С. Элементы теории дискретных динамических систем. Санкт-Петербург: Лань, 2016.
- Селиванов В.В. Взаимосвязь мышления и творчества в теории Я.А. Пономарева. Психология творчества: школа Я.А. Пономарева. М.: ИПРАН, 2006. С. 428–438.
- Смирнов Е.И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога. Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2012.
- Смирнов Е.И., Богун В.В., Уваров А.Д. Синергия математического образования: Введение в анализ. Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2016.
- Смирнов Е.И., Уваров А.Д., Смирнов Н.Е. Компьютерный дизайн нелинейного роста «площадей» нерегулярного цилиндра Шварца // Евразийское научное обозрение. 2017. Т. 30. № 8. С. 35–55.
- Смирнов Е.И., Уваров А.Д., Тихомиров С.А. Синергия площадей двумерных многообразий на основе симбиоза математического и компьютерного моделирования // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2024. №3 (35). С. 69–79. DOI: 10.24888/2500-1957-2024-3-69-79
- Сысueva Д.А., Поздеева Е.А. Проблема дифференцируемости нестандартных «монстров». Эвристика и дидактика математики. Материалы XIII Международной научно-методической дистанционной конференции – конкурса молодых учёных, аспирантов и студентов. Донецк: Изд-во ДонНУ, 2024. С. 37–40.
- Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов Т.1. М.: Физматлит, 2001.
- Dvoryatkina S.N., Melnikov R.V., Smirnov E.I. Technology of synergy manifestation in the research of solution's stability of differential equations system. European Journal of Contemporary Education. vol. 6, no. 4, 2017. pp. 684-699. DOI: 10.13187/ejced.2017.4.684.
- Fatahi S. An experimental study of an adaptive e-learning environment based on the personality and emotions of the student. Education and Information Technology, 2019. Vol. 24. No. 4. P. 2225-2241.
- Shi B., Wang L., Yang J., Zhang M. and Xu L. Relationship between Divergent Thinking and Intelligence: An Empirical Study of the Threshold Hypothesis with Chinese Children. Frontiers in Psychology, 2017. 8. 254. DOI: 10.3389/fpsyg.2017.00254

Smirnov E.I. Complex Multi-Stage Tasks for Testing Schoolchildren in the Mathematics Course. Semenov A.L. et al. (eds.), Chapter 2. Structural and Technological Transformation of Education in the Post-Pandemic Period. Problems and Prospects. Monograph. Springer: «Lecture Notes in Networks and Systems», 2025. P. 103-113.

Информация об авторах

Смирнов Евгений Иванович; доктор педагогических наук; профессор; зав. кафедрой математического анализа, теории и методики обучения математике; ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского» (Российская Федерация, 150000, г. Ярославль, ул. Республиканская, д. 108/1); ведущий научный сотрудник отдела функционального анализа (по совместительству); Южный математический институт – филиал ФГБУН ФНЦ «Владикавказский научный центр РАН» (Российская Федерация, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, д. 53); E-mail: smiei@mail.ru; ORCID: 0000-0002-2925-4360; Scopus ID: 55734369900;

Дворяткина Светлана Николаевна; доктор педагогических наук; доцент; проректор по научной и инновационной деятельности; профессор кафедры математики, информатики, физики и методики обучения (по совместительству); ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина» (Российская Федерация, 399770, г. Елец, Липецкая область, ул. Коммунаров, д. 28); E-mail: prorektornr@elsu.ru; ORCID: 0000-0001-7823-7751; Scopus ID: 57193775897;

Тихомиров Сергей Александрович; кандидат физико-математических наук; доцент; доцент кафедры геометрии и алгебры; ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского» (Российская Федерация, 150000, г. Ярославль, ул. Республиканская, д. 108/1); E-mail: satikhomirov@mail.ru; ORCID: 0000-0002-7409-8464; Scopus ID: 9133507700.

PERSONAL CREATIVITY AS A MODE OF EXPRESSION OF THE EPISTEMOLOGY OF THE FOUNDATION OF FRACTAL COMPLEXITY

Smirnov E. I. Dr. Sci. (Pedagogy), Professor	Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky; Southern Mathematical Institute (branch) Vladikavkaz Scientific Centre of the RAS
Dvoryatkina S. N. Dr. Sci. (Pedagogy), Associate Professor	Bunin Yelets State University
Tikhomirov S. A. Ph. D. (Mathematics), Associate Professor	Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky

Abstract. This article examines the relationship between an individual creativity and the process of complex systems understanding in the thinking context of modern complexity paradigm. The authors argue that the traditional identification of creativity with a high level of intelligence is insufficient. The manifestation of creative abilities requires overcoming stereotypes, engaging intuitive and logical levels of thinking, and possessing unique of personal qualities. The epistemology of fractal complexity founding is a gradually revealing process of objects essence under the study through fractal self-similar structures, bifurcation transitions, and synergistic effects is

proposed as a key mechanism for actualizing creativity. It is theoretically substantiated that fractal complexity creates barriers to understanding, enhances motivation, and serves as a driver for thought self-organization. The empirical section of paper demonstrates the implementation of proposed approach using two examples: a study of Schwartz cylinder (boot), leading to the construction of "Schwartz cup" fractal and a cluster-based founding for the concept of Hausdorff measure, which combines length, area, and volume. It is shown that solving multi-stage mathematical and information problems using computer and mathematical modeling not only reveals the essence of basic mathematical constructs but also serves as a modality for expressing students' creativity, divergent thinking, and innovation.

Keywords: fractal complexity, mathematical and computer modeling, founding, personality creativity

For citation: Smirnov E. I., Dvoryatkina S. N., Tikhomirov S. A. (2026). Personal Creativity as a Mode of Expression of the Epistemology of the Foundation of Fractal Complexity. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2 (42), 92–104. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-92-104

Copyright: © E. I. Smirnov, S. N. Dvoryatkina, S. A. Tikhomirov (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Bogoyavlenskaya, D. B. (1981). *Puti k tvorchestvu*. Moscow: Znanie. (In Russ.)
- Budanov, V. G., Arshinov, V. I., Lepskij, V. E., Svirskij, Ya. I. (2018). *Slozhnostnost' i problema edinstva znaniya*. Vyp. 1: *K strategii poznaniya slozhnosti*. Moscow: IF RAN. (In Russ.)
- Dvoryatkina S. N., Melnikov R. V., Smirnov E. I. (2017). Technology of synergy manifestation in the research of solution's stability of differential equations system. *European Journal of Contemporary Education*, 6 (4), 684-699. DOI: 10.13187/ejced.2017.4.684.
- Fatahi S. (2019). An experimental study of an adaptive e-learning environment based on the personality and emotions of the student. *Education and Information Technology*, 24 (4), 2225-2241.
- Ivanov, A. O., Tuzhilin, A. A. (2018). *Geometricheskaya teoriya mery*. Chast' 1. Uchebnoe posobie. Moscow: Izd-vo Popechitel'skogo soveta mekhaniko-matematicheskogo fakul'teta MGU. (In Russ.)
- Ivanova, V. A. (2021). Issledovanie tvorcheskogo myshleniya v otechestvennoj psihologii. *Molodoj uchenyj*, 4 (346), 129-132. (In Russ.)
- Katkov, A. L. (2020). Epistemologicheskij smysl psihologicheskogo krizisa. *Professional'naya psihoterapevticheskaya gazeta*, 11, 12-25. (In Russ.)
- Mandel'brot, B. B. (2002). *Fraktal'naya geometriya prirody*. Per. s angl. Moscow: In-t komp'yuternyh issledovanij. (In Russ.)
- Moren, E. (2019). *O slozhnostnosti*. Moscow: Institut obshchegumanitarnyh issledovanij. (In Russ.)
- Porus, V. N. (2010). *Postpozitivizm. Novaya filosofskaya enciklopediya v 4 t.* Pred. nauch.-red. soveta V.S. Styopin. 2-e izd., ispr. i dop. Moscow: Mysl'. (In Russ.)
- Sekovanov, V. S. (2016). *Elementy teorii diskretnyh dinamicheskikh sistem*. Sankt-Peterburg: Lan'. (In Russ.)
- Selivanov, V. V. (2006). *Vzaimosvyaz' myshleniya i tvorchestva v teorii Ya.A. Ponomareva. Psihologiya tvorchestva: shkola Ya.A. Ponomareva*. Moscow: IPRAN, 428-438. (In Russ.)
- Shi B., Wang L., Yang J., Zhang M. and Xu L. (2017). Relationship between Divergent Thinking and Intelligence: An Empirical Study of the Threshold Hypothesis with Chinese Children.

- Frontiers in Psychology*, 8, 254. DOI: 10.3389/fpsyg.2017.00254. Smirnov, E. I. (2012). *Fundirovanie opyta v professional'noj podgotovke i innovacionnoj deyatel'nosti pedagoga*. Yaroslavl': Izd-vo «Kancler». (In Russ.)
- Smirnov, E. I. (2012). *Fundirovanie opyta v professional'noj podgotovke i innovacionnoj deyatel'nosti pedagoga*. Yaroslavl': Izd-vo «Kancler». (In Russ.)
- Smirnov, E. I., Bogun, V. V., Uvarov, A. D. (2016). *Sinerгиya matematicheskogo obrazovaniya: Vvedenie v analiz*. Yaroslavl': Izd-vo «Kancler». (In Russ.)
- Smirnov, E. I., Uvarov, A. D., Smirnov, N. E. (2017). Komp'yuternyj dizajn nelinejnogo rosta «ploshchadej» neregulyarnogo cilindra Shvarca. *Evrazijskoe nauchnoe obozrenie*, 30(8), 35-55. (In Russ.)
- Smirnov, E. I., Uvarov, A. D., Tihomirov, S. A. (2024). Synergy of Areas of Two-Dimensional Manifolds Based on the Symbiosis of Mathematical and Computer Modeling. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 3 (35), 69-79. DOI: 10.24888/2500-1957-2024-3-69-79 (In Russ., abstract in Eng.)
- Smirnov E. I. (2025). Complex Multi-Stage Tasks for Testing Schoolchildren in the Mathematics Course. Semenov A.L. et al. (eds.), Chapter 2. Structural and Technological Transformation of Education in the Post-Pandemic Period. Problems and Prospects. Monograph. Springer: «Lecture Notes in Networks and Systems». 103-113.
- Sysueva, D. A., Pozdeeva, E. A. (2024). Problema differenciruemosti nestandartnyh «monstrov». [The Problem of Differentiability of Non-standard "Monsters"]. *Evristika i didaktika matematiki. Materialy XIII Mezhdunarodnoj nauchno-metodicheskoy distancionnoj konferencii – konkursa molodyh uchenyh, aspirantov i studentov* (pp. 37-40). Doneck: Izd-vo DonNU. (In Russ.)
- Fihtengol's, G. M. (2001). *Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya: uchebnik dlya vuzov*. T.1. Moscow: Fizmatlit. (In Russ.)

Information about the authors

Eugeny I. Smirnov; Doctor of Pedagogical Sciences; Professor; Head of the Department of Mathematical Analysis, Theory and Methods of Teaching Mathematics; Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky (Respublikanskaya Street, 108/1, Yaroslavl, 150000, Russian Federation); Leading Scientific Researcher; Department of Functional Analysis; Southern Mathematical Institute – the branch of the Vladikavkaz Scientific Centre of the RAS (Vatutina Street, 53, Vladikavkaz, 362025, Russian Federation); E-mail: smiei@mail.ru; ORCID: 0000-0002-2925-4360; Scopus ID: 55734369900;

Svetlana N. Dvoryatkina; Doctor of Pedagogical Sciences; Associate Professor; ViceRector for Research and Innovation Activities; Professor of the Department of Mathematics, Computer Science, Physics, and Teaching Methods (part-time); Bunin Yelets State University (Kommunarov St., 28, Yelets, Lipetsk Region, 399770, Russian Federation); E-mail: prorektornr@elsu.ru; ORCID ID: 0000-0001-7823-7751; Scopus ID: 57193775897;

Sergey A. Tikhomirov; Candidate of Physico-Mathematical Sciences; Associate Professor; Associate Professor of the Department of Geometry and Algebra; Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky (Respublikanskaya Street, 108/1, Yaroslavl, 150000, Russian Federation); E-mail: satikhomirov@mail.ru; ORCID: 0000-0002-7409-8464; Scopus ID: 9133507700.

Статья поступила в редакцию	23.04.2026
Принята к публикации	15.05.2026
Статья опубликована	19.06.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-105-119

УДК
378.147**НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕМЕ
«ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ»****Спиридонов Михаил Яковлевич** | Московский политехнический
к.ф.-м.н., доцент | университет

Аннотация. Начальные сведения о линейных операторах и матрицах предлагается излагать в их единстве, в их неразрывной связи. При этом все формулы лучше давать в числовом (а не в буквенном) формате, что никак не ограничивает и не умаляет общности рассуждений, но делает их (и формулы, и рассуждения) понятными для большей части учащихся. Стандартные действия над линейными преобразованиями как над функциями порождают соответствующие операции над матрицами, что демонстрирует естественность их (операций) происхождения и, как следствие, делает общепринятыми. В частности, известное правило умножения матриц, кажущееся на первый взгляд искусственным, возникает при построении композиции линейных операторов. Это одна из серии статей автора, в которых показывается реализация одного из фундаментальных принципов обучения – каждое вновь вводимое понятие, определение, правило подсчёта и т. д. должно быть предварительно разумно мотивировано, чтобы не выглядеть для обучающегося непонятно откуда взявшимся.

Ключевые слова: линейное преобразование, матрица линейного оператора, действия над линейными преобразованиями, операции над матрицами и происхождение правил их выполнения

Для цитирования: Спиридонов М.Я. Некоторые методические замечания по теме «Операции над матрицами» // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 2 (42). С. 105–119. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-105-119

Права: © М.Я. Спиридонов (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Многие современные учебные курсы построены на дедуктивной организации содержания и демонстрируют формальную математическую строгость изложения. Однако это, само по себе похвальное, стремление к математической точности и пунктуальности затрудняет понимание учебного материала, особенно вчерашнему школьнику: ведь естественный процесс познания идёт от частного (от примеров) к общему, от конкретного к абстрактному. И учебный процесс должен строиться именно по этому принципу.

Главным концентром линейной алгебры являются линейные (или векторные) пространства и линейные преобразования (линейные операторы), действующие в этих пространствах. Конечно, в рамках линейной алгебры изучаются и другие математические объекты линейной природы, например, билинейные или, обобщая, полилинейные формы (тензоры) – функции нескольких переменных, линейные по каждому аргументу.

Учебный курс линейной алгебры начинается, как правило, с понятия матриц и действий над ними. При этом в большинстве учебных пособий (не говоря уж о руководствах

по решению задач) операции над матрицами вводятся формально, по готовым алгоритмам, без объяснения их происхождения. И если сложение матриц и умножение матрицы на число как-то не вызывают отторжения, то умножение матрицы на матрицу, введённое без комментариев о его источнике, смотрится довольно искусственным и требуют от учащегося слепого механического исполнения некоторой пошаговой инструкции. Аналогично, линейные операторы описываются абстрактно как отображения векторных пространств, сохраняющие линейные операции, а затем конкретные расчётные моменты возникают только в связи с их матрицами и матрицами преобразований базисов и координат.

Сказанное в полной мере относится к таким известным учебникам по линейной алгебре, как (Бугров, Никольский, 2004), (Ильин, Позняк, 2005), (Беклемишев, 2015), (Винберг, 2001), (Постников, 2009, ч. I, лекция 6, ч. II, лекция 15). Однако, надо отдать должное, в последующих главах в перечисленных учебных пособиях операции над матрицами связываются с операциями над линейными преобразованиями, при этом все пояснения даются в буквенной символике (которая не всегда приветствуется недавними школьниками) и, как правило, для операторов, действующих в векторных пространствах одинаковой размерности, то есть для квадратных матриц.

Отдельно стоит сказать об учебниках (Курош, 2021), (Смирнов, 2010), (Кострикин, 2004). В них изучение линейных операторов проводится в связке с их матрицами, и вводимые операции над линейными преобразованиями (как над функциями) сразу находят своё выражение в действиях над матрицами этих преобразований. Именно такой подход к изложению данной темы разделяется автором и реализуется в настоящей статье. Однако в указанных учебных пособиях (как и в отмеченных выше) всё объяснение учебного материала проводится в буквенной символике в пространствах общей размерности, почти без конкретных числовых примеров. К сожалению, такое изложение сегодня с трудом воспринимается многими студентами-первокурсниками, не привыкшими к осваиванию значительных объёмов абстрактного (пусть и математически формализованного) текста.

При обучении естественно всегда отталкиваться от простых примеров, моделей, закономерностей и т. д., которые должны быть ясны для среднестатистического учащегося. Здесь годятся и простейшие числовые примеры, и иллюстрации, и несложные логические схемы, которые делали бы понятными изучаемые объекты и вводимые понятия, показывали бы различные связи между ними, то есть раскрывали бы существо дела (пусть даже в самой простой, в самой примитивной ситуации). Применительно к преподаванию линейной алгебры это означает, что представление о линейных операторах ученик должен получить на простейших примерах с конкретными числовыми коэффициентами, понять, почему с помощью именно таких выражений (однородных многочленов первой степени от нескольких переменных) нужно задавать функции, чтобы они являлись линейными преобразованиями. И числовые матрицы различных размерностей здесь возникают как удобный объект, полностью описывающий задание линейного оператора (а не сами по себе и непонятно откуда взявшиеся, что зачастую практикуется на начальных этапах обучения матрицам, определителям и системам). Наконец, надо показать, что операции над матрицами возникают естественным образом как отражение привычных (и известных из школы) математических операций над функциями, применённых к линейным операторам. Системы линейных уравнений можно преподнести как порождение линейных преобразований: решение системы – это отыскание прообраза элемента при линейном отображении. В курсе элементарной математики источник появления систем уравнений другой: они часто возникают при построении математических моделей в так называемых текстовых задачах на движение, на работу и т. д.

Введённые операции над матрицами позволяют более наглядно и компактно записывать в матричной форме любые линейные преобразования, произвольные системы линейных уравнений, формировать композицию (произведение) линейных операторов. Чисто внешняя аналогия матричного уравнения $AX = B$ с обычным числовым уравнением

$ax = b$ привела к идентичному способу решения (в тех случаях, когда обратная матрица A^{-1} существует).

Одним из основных трендов автора в педагогической практике является обязательное объяснение на содержательном уровне появления тех или иных новых объектов, введения тех или иных понятий и определений, трактование тех или иных (как доказанных, так и приводимых без доказательства) фактов. Так, действия над линейными преобразованиями определяются (и на это следует обращать внимание учащихся) по тем же законам, что и известные из школьного курса действия над вещественнозначными функциями одной вещественной переменной. Операции над линейными преобразованиями приводят, в свою очередь, к (осуществляемым общепринятым способом) операциям над матрицами, делая понятным их происхождение, что особенно актуально для умножения матриц. Тезисы по рассматриваемой в статье тематике автор докладывал на конференции (Спиридонов, 2025).

С другими примерами подобного опыта автора можно ознакомиться по следующим публикациям. В статье (Спиридонов, 2022) показано, как при решении систем линейных уравнений возникает понятие определителя и способы его подсчёта, причём и специальные (через произведение диагоналей для второго порядка, правило треугольников для третьего порядка), и универсальное правило разложения по строке или столбцу. В статье (Спиридонов, 2024) красной нитью проводится мысль о том, что математическое понятие вероятности раскрывается только в его частотной интерпретации, а потому свойства вероятностей, формулы для подсчёта условной и безусловной вероятностей события мотивируются предварительными рассуждениями на языке частот, что делает понятными соотношения, принимаемые за аксиомы и определения в теории вероятностей.

Линейные функции и линейные преобразования

В школьном курсе математики рассматриваются только функции в области вещественных чисел. Поэтому при изложении курса линейной алгебры, с которого начинается первый семестр, нужно опираться только на уже знакомые студентам-первокурсникам понятия, в частности, на вещественнозначные функции одного вещественного аргумента.

Функция $y = f(x)$ называется *линейным оператором* (или *линейным преобразованием*), если при любых вещественных числах x' , x'' , λ , x справедливы соотношения

$$f(x' + x'') = f(x') + f(x''), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Таким образом, линейные преобразования – это функции, сохраняющие линейные операции над аргументами; точнее: это функции, которые линейные операции над аргументами переводят в те же линейные операции над их образами.

Здесь сразу возникают вопросы:

1. Какими формулами должны задаваться функции, чтобы они были линейными операторами?
2. Как выглядят простейшие линейные операторы?

Для первоначальной пробы возьмём простейшую функцию – линейную, $y = kx + b$. Проверим оба условия из определения линейного оператора. Имеем:

$$\begin{aligned} y(x' + x'') &= k(x' + x'') + b = kx' + kx'' + b, \\ y(x') + y(x'') &= kx' + b + kx'' + b = kx' + kx'' + 2b; \\ y(\lambda x) &= k(\lambda x) + b, \quad \lambda y(x) = \lambda(kx + b) = \lambda kx + \lambda b. \end{aligned}$$

Следовательно, линейная функция $y = kx + b$ будет линейным преобразованием тогда и только тогда, когда $b = 2b$ и $b = \lambda b$, что возможно лишь при $b = 0$. Другими словами, линейная функция входит в класс линейных операторов лишь тогда, когда она представляет собой прямую пропорциональную зависимость $y = kx$ (случай $k \neq 0$) или является тождественным нулём $y \equiv 0$ (случай $k = 0$).

Другие элементарные функции пробовать на предмет линейности даже не имеет смысла. Так, например, корень или логарифм от суммы чисел вообще не преобразуется (нет формул для $\sqrt[n]{x' + x''}$ и $\log_a(x' + x'')$), а квадратичная, показательная и тригонометрическая функции явно свойством линейности не обладают:

$$(x' + x'')^2 = (x')^2 + 2x'x'' + (x'')^2; \quad a^{x'+x''} = a^{x'} \cdot a^{x''};$$

$$\cos(x' + x'') = \cos x' \cdot \cos x'' - \sin x' \cdot \sin x''.$$

Таким образом, в формулах линейных преобразований должны быть слагаемые в виде произведения числа на переменную, то есть слагаемые вида kx при любых k . Давайте проверим это утверждение для вещественнозначной функции двух переменных, построив её в соответствии со сформулированным правилом (а тогда всё легко обобщится и на случай нескольких переменных). Возьмём, к примеру, функцию $y = 2x_1 + 9x_2 \equiv L_2(x)$, которая определена при всех x_1, x_2 . Иначе говорят, что функция $L_2(x)$ определена на множестве всех упорядоченных пар вещественных чисел $x \equiv (x_1; x_2)$, которое называется двумерным арифметическим пространством и обозначается \mathbb{R}^2 , со значениями в множестве вещественных чисел \mathbb{R} . В математике это записывают в виде $L_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ или, если нужно уточнить обозначения переменных, в виде $L_2: \mathbb{R}^2_{(x_1; x_2)} \rightarrow \mathbb{R}_y$. Операции сложения и умножения на числа в арифметическом пространстве определяют «покомпонентно»:

$$x = (x_1; x_2), \quad x' = (x'_1; x'_2), \quad x'' = (x''_1; x''_2), \quad x' + x'' = (x'_1 + x''_1; x'_2 + x''_2), \quad \lambda x = (\lambda x_1; \lambda x_2).$$

Убедимся в том, что функция $L_2(x)$ действительно является линейным оператором из \mathbb{R}^2 в \mathbb{R} :

$$L_2(x' + x'') = 2(x'_1 + x''_1) + 9(x'_2 + x''_2) = L_2(x') + L_2(x'') = 2x'_1 + 9x'_2 + 2x''_1 + 9x''_2;$$

$$L_2(\lambda x) = 2(\lambda x_1) + 9(\lambda x_2) = \lambda L_2(x) = \lambda(2x_1 + 9x_2).$$

Теперь становится понятным следующее утверждение относительно числовой линейной функции нескольких переменных $y = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$: она является линейным преобразованием тогда и только тогда, когда отсутствует постоянное слагаемое, то есть когда $c_0 = 0$. Итак, функция $y = L_n(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ задаёт линейное преобразование из $\mathbb{R}^n_{(x_1; \dots; x_n)}$ в \mathbb{R}_y^1 .

Все приведённые выше рассуждения носят крайне важный характер в образовательном процессе: они призваны развить понятийный аппарат учащихся, раскрыть содержательную сторону вновь вводимых определений и позволяют общее абстрактное описание линейного оператора наполнить конкретным содержанием (посредством явного предъявления простой расчётной формулы в результате несложных размышлений). Кроме того, эту часть занятия нужно проводить, выполняя все выкладки на аудиторной доске и тем самым подталкивая учащихся к необходимости конспектировать. Последнее подключает мелкую моторику рук к визуальному и слуховому каналам восприятия информации, что делает усвоение знаний более прочным и долговременным.

Итак, вид формул, которые обеспечивают для функции выполнение условий линейного преобразования, установлен: это однородные многочлены первой степени с несколькими переменными $L_n(x)$. Поэтому теперь можно на одной таблице (выведа её на экран в аудитории) показать несколько примеров линейных преобразований, действующих в различных арифметических пространствах (таблица 1). По содержанию информация в таблице 1 крайне проста, понятна и легко воспринимается слушателями, однако она довольно громоздка и требует определённого времени (так ценного на уроке) для переписывания обучающимися в конспект. В подобных ситуациях вполне оправдано использование заранее заготовленных презентаций (слайд-шоу) с учебным материалом. В приведённых примерах все линейные преобразования представляют собой векторнозначные

(а не вещественнозначные, как это было ранее) функции, но такое (в общем-то, скромное) усложнение не вызывает у обучающихся вопросов и встречает полное понимание.

Таблица 1.

Примеры линейных операторов (линейных преобразований)

линейное преобразование	матрица линейного преобразования
$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 + 7x_2 - 6x_3, \\ y_2 = 5x_1 - 9x_2 + 3x_3 \end{cases}$ $f: \mathbb{R}_{(x_1; x_2; x_3)}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{(y_1; y_2)}^2$	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 5 & -9 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$
$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4x_1 + 3x_2, \\ y_2 = -x_1 + 8x_2 \end{cases}$ $f: \mathbb{R}_{(x_1; x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(y_1; y_2)}^2$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$
$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -6x_1 - 20x_2, \\ y_2 = -12x_1 + x_2, \\ y_3 = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$ $f: \mathbb{R}_{(x_1; x_2)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(y_1; y_2; y_3)}^3$	$\begin{pmatrix} -6 & -20 \\ -12 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

Из таблицы 1 видно, что линейное преобразование однозначно определяется своей матрицей: по матрице оператора легко выписываются формулы, связывающие независимые переменные из пространства \mathbb{R}_x^n и зависимые переменные из пространства \mathbb{R}_y^m (числа m и n равны, соответственно, количеству строк и количеству столбцов в матрице преобразования).

Кстати, любая система линейных уравнений допускает интерпретацию в терминах линейных преобразований. Так, решая, к примеру, систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -1, \end{cases}$$

то есть находя все её решения, мы фактически находим все принадлежащие $\mathbb{R}_{(x_1; x_2; x_3)}^3$ прообразы элемента $(4; -1) \in \mathbb{R}_{(y_1; y_2)}^2$ при линейном преобразовании, которое определяется матрицей системы (первая функция в таблице 1; ищется $f^{-1}(4; -1)$).

Линейные операции над линейными преобразованиями

К линейным операциям над элементами некоторого множества относятся их сложение и умножение на число (или, более общо, умножение на элементы произвольного поля).

Над числовыми функциями $y = u(x)$ и $y = v(x)$, имеющими общую область определения, определяются все четыре арифметические операции по следующим правилам:

$$(u \pm v)(x) = u(x) \pm v(x); \quad (u \cdot v)(x) = u(x) \cdot v(x); \quad \left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad v(x) \neq 0.$$

Умножение функции на число вытекает из формулы для произведения функций при условии, что одна из них является тождественной константой. Все перечисленные операции над функциями многократно осуществлялись в курсе элементарной математики и, безусловно, знакомы каждому школьнику. Из этих соотношений следует, что для нахождения суммы, произведения или частного двух функций нужно при каждом значении аргумента x вычислить значения $u(x)$, $v(x)$ обеих функций, а затем полученные значения функций сложить/вычесть, перемножить, поделить.

В качестве примера на таблице 2 проиллюстрировано выполнение линейных операций над конкретными функциями $u(x) = x^3$ и $v(x) = 5^x$, а именно, показаны процедуры сложения выбранных функций и умножение первой из них на число 9 (взятого

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

исключительно для примера). В нижней строке таблицы 2 эти же операции проведены при $x = 4$, чтобы были воочию видны все производимые при этом числовые расчёты и их последовательность.

Таблица 2.

Линейные операции над функциями одной переменной

$y = u(x)$	$y = v(x)$	$u(x) + v(x)$	$9 \cdot u(x)$
$y = x^3$	$y = 5^x$	$x^3 + 5^x$	$9 \cdot x^3$
$u(4) = 4^3$	$v(4) = 5^4$	$4^3 + 5^4$	$9 \cdot 4^3$

Совершенно аналогично вводят линейные операции и над линейными преобразованиями: сначала по произвольному числовому набору x_1, x_2, \dots независимых переменных вычисляют значения y_1, y_2, \dots зависимых переменных, а затем полученные значения зависимых переменных складывают между собой («покомпонентно») или каждое умножают на число. Примеры представлены на таблице 3. Помещённая на таблице 3 информация хорошо и быстро усваивается учащимися (при минимальных комментариях преподавателя) и поэтому вся может быть выведена на экран в аудитории (что сэкономит значительное количество учебного времени).

Таблица 3.

Линейные операции над линейными преобразованиями

Сложение линейных преобразований	
$y = f_1(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 6x_1 + 5x_2, \\ y_2 = 3x_1 + 2x_2, \\ y_3 = 7x_1 - 4x_2 \end{cases}$	$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$
$y = f_2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -9x_1 - 27x_2, \\ y_2 = -8x_1 + 39x_2, \\ y_3 = 42x_1 + 15x_2 \end{cases}$	$A_2 = \begin{pmatrix} -9 & -27 \\ -8 & 39 \\ 42 & 15 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$
$y = f_1(x) + f_2(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = (6 - 9)x_1 + (5 - 27)x_2, \\ y_2 = (3 - 8)x_1 + (2 + 39)x_2, \\ y_3 = (7 + 42)x_1 + (-4 + 15)x_2 \end{cases}$	$A_1 + A_2 =$ $= \begin{pmatrix} 6 - 9 & 5 - 27 \\ 3 - 8 & 2 + 39 \\ 7 + 42 & -4 + 15 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$
Умножение линейного преобразования на число	
$y = 9 \cdot f_1(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 9 \cdot 6x_1 + 9 \cdot 5x_2, \\ y_2 = 9 \cdot 3x_1 + 9 \cdot 2x_2, \\ y_3 = 9 \cdot 7x_1 - 9 \cdot 4x_2 \end{cases}$	$9 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 9 \cdot 6 & 9 \cdot 5 \\ 9 \cdot 3 & 9 \cdot 2 \\ 9 \cdot 7 & 9 \cdot (-4) \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

Показанные на таблице 3 расчёты демонстрируют то, что в результате линейных операций над линейными преобразованиями вновь получаются линейные преобразования, или, как говорят математики, множество линейных операторов, действующих в фиксированных арифметических пространствах (из \mathbb{R}_x^n в \mathbb{R}_y^m при фиксированных m и n), является замкнутым относительно линейных операций.

Матрицы линейных преобразований, полученных в результате линейных операций, формируются из матриц исходных преобразований довольно простыми действиями по типу самих операций: при сложении линейных преобразований элементы матриц-слагаемых, расположенные на одинаковых местах, складываются, а при умножении оператора на число каждый элемент его матрицы умножается на это число. В полном соответствии с

описанными правилами и вводятся линейные операции над матрицами (таблицами чисел) – сложение матриц (одного размера) и умножение любой матрицы на число.

Примеры линейных операций над матрицами.

$$1. \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 5 & 9 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$2. 5 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -7 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 10 & 8 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 3 & -21 \\ -27 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 7 & 29 \\ 23 & 12 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Композиция линейных преобразований и умножение матриц

Умножение линейных преобразований, действующих в одних и тех же арифметических пространствах, вполне можно было бы ввести в соответствии с общим правилом умножения функций: так же, как и при сложении преобразований, задав значения аргументов, находим значения y_1, y_2, \dots зависимых переменных, а затем их перемножаем «покомпонентно». Вот как выглядит произведение линейных преобразований $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из таблицы 3, если следовать этому алгоритму:

$$\begin{cases} y_1 = (6x_1 + 5x_2) \cdot (-9x_1 - 27x_2) = -54x_1^2 - 207x_1x_2 - 135x_2^2, \\ y_2 = (3x_1 + 2x_2) \cdot (-8x_1 + 39x_2) = -24x_1^2 + 101x_1x_2 + 78x_2^2, \\ y_3 = (7x_1 - 4x_2) \cdot (42x_1 + 15x_2) = 294x_1^2 - 63x_1x_2 - 60x_2^2 \end{cases}$$

В результате получена векторнозначная функция нескольких переменных, отображающая $\mathbb{R}^2_{(x_1; x_2)}$ в $\mathbb{R}^3_{(y_1; y_2; y_3)}$. Но она не является линейным преобразованием: здесь связь между независимыми и зависимыми переменными осуществляется посредством однородных многочленов второй (а не первой) степени. Такого сорта функции служат предметом изучения теории функций нескольких переменных, векторного (и шире – математического) анализа и т. д., но не линейной алгебры.

Оказывается, образованная из линейных преобразований сложная функция (иначе: композиция функций) будет также линейным преобразованием. Вот эту-то матрицу композиции линейных преобразований и называют произведением (или, реже, хотя и более правильно, композицией) матриц исходных преобразований. Покажем на примере, как из матриц-сомножителей формируется матрица-произведение.

Понятие сложной функции входит в программу школьного курса элементарной математики и потому хорошо знакомо обучающимся. Напомним: если имеются две функции $y = F(x)$ и $z = G(y)$ и значения первой входят в область определения второй, то из них можно составить сложную функцию (композицию функций) по правилу $z = G(F(x)) \equiv (G \circ F)(x)$. Последняя функция будет каждому значению независимой переменной x ставить в соответствие значение зависимой переменной z . Графическая иллюстрация композиции функций приведена на рис. 1.

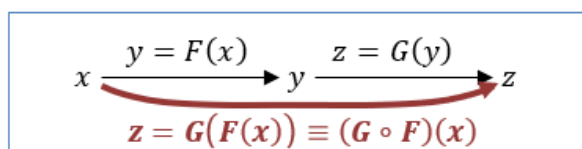


Рис. 1. Композиция функций

Пример построения композиции (последовательного применения) двух линейных преобразований приведён на таблице 4. Обратите внимание: все числа в матрицах исходных преобразований различны и положительны. Это сделано намеренно, чтобы легче можно

было отследить траекторию каждого элемента в совершаемых преобразованиях и его место в итоговой матрице.

Таблица 4.

Пример композиции линейных преобразований

Линейные преобразования и их матрицы	
F $(x_1; x_2; x_3) \rightarrow (y_1; y_2)$ $\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3, \\ y_2 = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 \end{cases}$ $A \equiv \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$	G $(y_1; y_2) \rightarrow (z_1; z_2)$ $\begin{cases} z_1 = 8y_1 + 10y_2, \\ z_2 = y_1 + 2y_2 \end{cases}$ $B \equiv \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$
Композиция линейных преобразований	
$G \circ F: (x_1; x_2; x_3) \rightarrow (z_1; z_2)$ $\begin{cases} z_1 = 8(5x_1 + 7x_2 + 3x_3) + 10(4x_1 + 6x_2 + 9x_3) \\ z_2 = 1(5x_1 + 7x_2 + 3x_3) + 2(4x_1 + 6x_2 + 9x_3) \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = (8 \cdot 5 + 10 \cdot 4)x_1 + (8 \cdot 7 + 10 \cdot 6)x_2 + (8 \cdot 3 + 10 \cdot 9)x_3, \\ z_2 = (1 \cdot 5 + 2 \cdot 4)x_1 + (1 \cdot 7 + 2 \cdot 6)x_2 + (1 \cdot 3 + 2 \cdot 9)x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 80x_1 + 116x_2 + 114x_3, \\ z_2 = 13x_1 + 19x_2 + 21x_3 \end{cases}$	

Пример на таблице 4 показывает, что сформированная из линейных преобразований $F: \mathbb{R}^3_{(x_1; x_2; x_3)} \rightarrow \mathbb{R}^2_{(y_1; y_2)}$ и $G: \mathbb{R}^2_{(y_1; y_2)} \rightarrow \mathbb{R}^2_{(z_1; z_2)}$ композиция $G \circ F: \mathbb{R}^3_{(x_1; x_2; x_3)} \rightarrow \mathbb{R}^2_{(z_1; z_2)}$ также является линейным преобразованием. Анализ проделанных выкладок приводит к выводу о том, что отмеченный факт будет иметь место для композиции любых линейных преобразований, из которых композиция вообще может быть образована.

Матрицу композиции линейных преобразований называют произведением матриц исходных преобразований, да и саму композицию линейных операторов практически всегда называют (по понятным теперь причинам) их умножением. Порядок матриц-сомножителей в их произведении в точности повторяет функциональную запись композиции: формуле $G \circ F$ отвечает произведение $B \cdot A$, где B – матрица оператора G , A – матрица оператора F . С учётом сказанного, для примера из таблицы 4 имеем:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 5 + 10 \cdot 4 & 8 \cdot 7 + 10 \cdot 6 & 8 \cdot 3 + 10 \cdot 9 \\ 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 9 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

Последняя формула показывает принцип умножения матрицы на матрицу: строки первой матрицы умножаются на столбцы второй так, как если бы они представляли собой координаты векторов в ортонормированном базисе и вычислялось бы их скалярное произведение, то есть при умножении строки на столбец перемножаются между собой их первые, вторые и т.д. элементы и полученные попарные произведения складываются; результаты перемножения строк на столбцы записываются в те строки и столбцы результирующей матрицы, номера которых совпадают с номерами перемножаемых строки и столбца. В выписанной выше формуле участвующие в умножении матриц строки и столбцы выделены различными цветами, что лучше подчёркивает выполняемые при умножении матриц действия над их элементами.

Описанное выше правило умножения матрицы на матрицу является общепринятым в математике. Оно, как мы видели, естественным образом появляется при построении композиции линейных преобразований, хотя на первый взгляд может показаться несколько

искусственным. Разумеется, перемножить можно не любые матрицы, как и композицию можно составить не из любых линейных преобразований (и вообще не из любых функций): умножение матрицы на матрицу осуществимо только в том случае, когда количество элементов в строке первой матрицы (то есть количество её столбцов) совпадает с количеством элементов в столбце второй (то есть с количеством её строк).

С помощью операции умножения матриц можно любое линейное преобразование записать в виде одного матричного равенства, равносильного применяемой везде выше покоординатной форме (типа системы линейных уравнений). В таблице 5 показано как это сделать на примере линейных преобразований из таблицы 1. Обратите внимание: сохраняя матрицу линейного преобразования в прежней (и, надо сказать, совершенно естественной) форме, независимые переменные (аргументы) уже **вынужденно** приходится записывать в виде вектора-столбца, чтобы было выполнимо соответствующее умножение, а тогда значения зависимых переменных «автоматически» получаются записанными матрицей-столбцом. Кстати, именно поэтому во все матричные соотношения линейной алгебры координаты векторов входят как векторы-столбцы.

Таблица 5.

Представление линейных преобразований в матричной форме

$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 + 7x_2 - 6x_3, \\ y_2 = 5x_1 - 9x_2 + 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 5 & -9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4x_1 + 3x_2, \\ y_2 = -x_1 + 8x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -6x_1 - 20x_2, \\ y_2 = -12x_1 + x_2, \\ y_3 = 5x_1 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -20 \\ -12 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Композиция линейных преобразований также легко формируется на языке матриц. Это показано на таблице 6, которая составлена на основе таблицы 4. При этом соответствующие формулы смотрятся не только не громоздкими, а даже, наоборот, приобретают довольно компактный и по-своему привлекательный вид.

Таблица 6.

Составление композиции линейных преобразований в матричной форме

$F: (x_1; x_2; x_3) \rightarrow (y_1; y_2)$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	$G: (y_1; y_2) \rightarrow (z_1; z_2)$ $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
Композиция линейных преобразований	
$G \circ F: (x_1; x_2; x_3) \rightarrow (z_1; z_2)$ $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 116 & 114 \\ 13 & 19 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$	

Если использовать буквенные обозначения не только для матриц, но и для переменных, то все связанные с линейными преобразованиями формулы станут более компактными и во многих случаях более удобными: при математических манипуляциях.

Действительно, обозначим буквами X и Y векторы-столбцы из независимых и зависимых переменных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Тогда любое линейное преобразование допускает представление в виде матричного равенства $Y = A \cdot X$, внешне похожего на функцию прямой пропорциональной зависимости (здесь A – матрица линейного оператора). Произвольная система линейных уравнений эквивалентна матричному уравнению $A \cdot X = B$, в котором B – матрица-столбец правых частей (свободных членов). Композиция линейных преобразований также составляется легко и буквально в одну строчку (для конкретики можно иметь в виду пример из таблиц 4 и 6):

$$Y = AX, \quad Z = BY \quad \Rightarrow \quad Z = B(AX) = (BA)X.$$

Дополнительные методические замечания по рассматриваемой тематике

1. Свойства операций над матрицами. Линейные операции над матрицами и операция умножения матриц удовлетворяют тем же свойствам, что и операции над числами, но с одним исключением: для умножения матриц не выполняется **переместительный (= коммутативный) закон**:

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

для матриц

Таким образом, оперируя с матрицами, нельзя произведение AB механически заменять на произведение BA . Это, собственно, и неудивительно: матрицы при перемножении используются «несимметрично» — у первой берутся строки, а у второй столбцы. При этом для отдельных матриц результат умножения может не меняться при их перестановке. Такие матрицы называются перестановочными (или коммутирующими). Вот нетривиальный пример.

Пример. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$ ■

В остальном, как уже отмечено, операция умножения матриц подчиняется всем привычным по работе с числами законам, например:

$$(AB)C = A(BC), \quad A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)D = BD + CD,$$

где размеры матриц A, B, C, D предполагаются таковыми, что все указанные операции выполнимы.

2. Обратная матрица. Необходимость введения понятия обратной матрицы можно объяснить двояко.

С одной стороны, желательно, чтобы над матрицами были определены все четыре арифметические операции, то есть наряду со сложением, вычитанием, умножением, ещё и деление. Если провести аналогию с числами, то деление на число равносильно умножению на ему обратное. Взаимно обратные числа определяются из соотношения $ab = 1$. И первым делом нужно понять, есть ли такая матрица (назовём её единичной), которая будет играть в умножении матриц ту же роль, что и единица в умножении чисел. Другими словами, при умножении единичной матрицы на другую в результате должна остаться эта другая матрица неизменной (так как для чисел $1 \cdot a = a$). Конечно, единичную матрицу можно пытаться подобрать непосредственно (и это несложно), но, по мнению автора, проще и с методической точки зрения лучше оттолкнуться от линейных преобразований (что, кстати, отвечает и тренду статьи).

Единичный оператор – это линейное преобразование (обозначим его через E), которое отображает аргумент в самого себя, оставляя его без изменений: $E(x) = x$, $x \in \mathbb{R}_x^n$. Матрица единичного оператора выписывается моментально (для простоты взято $n = 2$):

$$\begin{cases} y_1 = x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2, \\ y_2 = x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, единичная матрица (её принято обозначать через E или I) – это квадратная матрица произвольного порядка, на главной диагонали которой расположены 1 (единицы), а остальные элементы равны 0 (нулю). И действительно, не составляет труда убедиться в том, что $EC_1 = C_1$, $C_2E = C_2$ при любых (не обязательно квадратных) матрицах C_1 и C_2 , для которых указанные произведения выполнимы. Теперь понятно, что взаимно обратные матрицы должны удовлетворять условию $AB = E$.

С другой стороны, возможность записать любую систему линейных уравнений в виде матричного уравнения $AX = B$, внешне похожего на простейшее числовое линейное уравнение $ax = b$, наводит на мысль об общности методов их решений. Линейное уравнение решается делением обеих его частей на множитель a или, что то же самое, умножением обеих его частей на число a^{-1} , обратное к $a \neq 0$. Если эту идею переносить на матричное уравнение, то необходимо изучить вопрос о существовании такой матрицы A^{-1} (обратная матрица), для которой $A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица (аналог числа 1), то есть такая, что $EX = X$.

Интересно и полезно обсудить с учащимися вопрос о том, почему понятие обратной матрицы вводится только в случае, когда исходная матрица A является квадратной. Используемое при решении систем линейных уравнений равенство $A^{-1}A = E$ при размере $m \times n$ матрицы A требует от матрицы A^{-1} размера $n \times m$, так как единичная матрица должна быть квадратной. Но если для не квадратной матрицы A существовала бы обратная матрица A^{-1} , то система линейных уравнений $AX = B$ имела бы единственное решение $X = A^{-1}B$. Однако это противоречило бы фактам о разрешимости систем: например, система линейных уравнений с количеством уравнений, меньшим количества неизвестных, может иметь (и большей частью имеет) бесконечное множество решений.

3. Степени матрицы. Операция умножения матриц позволяет рассматривать степени матрицы с целыми показателями, определяя их по аналогии с числами. Так, квадрат матрицы – это умножение матрицы на саму себя: $A^2 = A \cdot A$. Отсюда сразу следует, что матрица A должна быть квадратной. Чтобы возвести матрицу в натуральную степень n , нужно её последовательно умножить саму на себя n раз. Если матрица имеет обратную (то есть невырожденная), то можно ввести степень матрицы с отрицательным целым показателем: $A^{-n} = (A^{-1})^n$. Полагают $A^0 = E$. Для степеней матрицы с целыми показателями справедливы привычные свойства степеней: $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$; $(A^m)^n = A^{m \cdot n}$.

Рассматривают также многочлены от матрицы.

Пример. Пусть даны матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и многочлен $P(x) = 5x^2 - x + 7$. Тогда значением многочлена $P(x)$ от матрицы A называется матрица

$$P(A) = 5A^2 - A + 7E = 5 \begin{pmatrix} 13 & -6 \\ 18 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & -29 \\ 87 & 10 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

4. Матричная интерпретация комплексных чисел. Комплексные числа $z = x + iy$ интерпретируют, как правило, геометрическими объектами – точками $(x; y)$ или радиус-векторами $\overrightarrow{OM} = (x; y)$ на координатной плоскости Oxy . Наряду с этим множество комплексных чисел допускает матричную интерпретацию, а именно, каждому комплексному числу $z = x + iy$ может быть сопоставлена матрица второго порядка вида

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что множество указанных матриц замкнуто относительно линейных операций, операции умножения матрицы на матрицу и операции перехода к обратной матрице (операции деления), при этом операция их умножения обладает свойством коммутативности:

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + x_2y_1) \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & -(-y) \\ -y & x \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

Единицей относительно умножения служит обычная единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а решением матричного уравнения $X^2 = -E$ является матрица $I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, служащая, понятное дело, аналогом мнимой единицы i .

Таким образом, множество матриц указанного специального вида можно рассматривать как одну из моделей комплексных чисел. Представлению любой такой матрицы в виде

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = xE + yI$$

отвечает привычная запись комплексного числа в алгебраической форме

$$z = (x; y) = x(1; 0) + y(0; 1) = x \cdot 1 + y \cdot i.$$

Заключение

Предлагаемые в данной статье таблицы рекомендуется использовать в учебном процессе – как на лекционных, так и на практических занятиях. Учебный материал на таблицах расположен компактно, каждая из них полностью может быть выведена на экран в аудитории, то есть обучаемые сразу видят весь учебный материал по изучаемому разделу курса. Как отмечалось ранее, информация на таблицах крайне проста и легко усваивается обучающимися, однако она громоздка и требует значительного времени при конспектировании. Но поскольку учебный материал на таблицах изложен довольно подробно, то для его понимания достаточно ограничиться лишь визуальным восприятием без времязатратного конспектирования учащимися. Подобное использование заранее заготовленных учебных таблиц (презентаций) следует признать целесообразным.

Однако в целом в учебном процессе такое использование заранее заготовленных слайдов должно быть крайне ограниченным и оправданным и никак не заменять и, уж тем более, не вытеснять рукописной работы учащихся по конспектированию учебного материала. Поэтому для закрепления полученных с помощью таблиц теоретических сведений обязательно нужно сразу же решить несколько задач, причём традиционным способом – поэтапной рукописной записью на учебной доске, призванной мотивировать работу учащихся по ведению своих конспектов, что, в свою очередь, приведёт к активизации мелкой моторики рук.

По современным научным данным (Бернштейн Н.А., 1990, глава восьмая), (Маркувина И.В., 2021 и библиография там), (Пятая газета, 2024, с. 2), мелкая моторика рук в наибольшей степени стимулирует развитие различных отделов головного мозга, причём начиная фактически с самого рождения. При этом именно занятие письмом (а не, к примеру, вязание, вышивание или лепка) способствует максимальному вовлечению в работу нейронов и нейронных связей на стыке различных областей мозга. Поэтому Учителю нужно стремиться к тому, чтобы конспектирование велось учащимися на протяжении всего занятия. Двигательные движения кистей рук наряду с визуальным и слуховым каналами приёма

информации обучающимися будут приводить к работе различных участков головного мозга и, как следствие, к прочному и надёжному усвоению знаний.

Список литературы

- Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. СПб: Лань, 2015.
- Бернштейн Н.А. Физиология движений и активность. М.: Наука, 1990.
- Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Под ред. В.А. Садовниченко. М.: Дрофа, 2004.
- Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2001.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. 6-е изд., стер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб: Лань, 2021.
- Маркувина И.В. Мелкая моторика как средство развития речи // Наука и реальность (Science&Reality): сетевой журн. 2021. № 2(6). С. 71–72. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/melkaya-motorika-kak-sredstvo-razvitiya-rechi> (дата обращения: 26.01.2026).
- Постников М.М. Аналитическая геометрия. Лекции по геометрии. Ч. I. 3-е изд., испр. СПб: Лань, 2009.
- Постников М.М. Линейная алгебра. Лекции по геометрии. Ч. II. 3-е изд., испр. СПб: Лань, 2009.
- Пятая газета / учредитель А.Л. Меллер. Свид-во ПИ № ФС77-62381. М., 2015. 8 полос. Еже-нед. 2024, 17 дек. № 51 (400).
- Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том III, часть 1. СПб: БХВ-Петербург, 2010.
- Спиридонов М.Я. О введении понятия определителя при преподавании математики // Наука, техника, педагогика высшей школы. Новые технологии. Материалы Всерос. науч.-практ. конф. «Наука – Общество – Технологии – 2022» (Россия, Москва, 1–4 марта 2022 г.). М.: Московский политехнический университет, 2022. С. 363–371.
- Спиридонов М.Я. О преподавании начал линейной алгебры: операторы и матрицы // Инновации в образовательном процессе. Сборник трудов XXIII Международной научно-практической конференции, посвящённой 70-летию основания института, Году защитника Отечества, 80-летию Победы в Великой Отечественной войне, в рамках Десятилетия науки и технологий (Россия, Чебоксары, 24.04.2025). Чебоксары: Чебоксарский институт (филиал) Московского Политеха, 2025. С. 24–29.
- Спиридонов М.Я. Отражение связи частоты и вероятности события в практике преподавания // Математика в школе. 2024. № 7. С. 36–48. DOI: 10.47639/0130-9358_2024_7_36

Информация об авторе

Спиридонов Михаил Яковлевич; кандидат физико-математических наук; доцент; доцент кафедры «Математика»; ФГАОУ ВО «Московский политехнический университет» (Российская Федерация, 107023, г. Москва, ул. Большая Семеновская, д. 38); E-mail: spir.polytech@mail.ru; ORCID: 0000-0003-1895-4737

**SOME METHODOICAL NOTES ON THE TOPIC “OPERATIONS ON
MATRIXES”**

Spiridonov M. Ya. | Moscow Polytechnic University
Ph.D (Mathematics), Associate Professor

Abstract. It is proposed to present the initial information about linear operators and matrices in their unity, in their inseparable connection. Moreover, it is better to give all formulas in numerical (and not alphabetic) format, which in no way limits or diminishes the generality of the reasoning, but makes them (both formulas and reasoning) understandable for the majority of students. Standard operations on linear transformations as on functions generate corresponding operations on matrices, which demonstrates the naturalness of their (operations) origin and, as a consequence, makes them generally accepted. In particular, the well-known rule of matrix multiplication, which at first glance seems artificial, arises when constructing a composition of linear operators. This is one of a series of articles by the author, which demonstrate the implementation of one of the fundamental principles of learning – each newly introduced concept, definition, counting rule, etc. must be reasonably motivated in advance, so as not to seem to the student to have come from nowhere.

Keywords: linear transformation, matrix of a linear operator, operations on linear transformations, operations on matrices and the origin of the rules for their execution.

For citation: Spiridonov M. Ya. (2026). Some Methodical Notes on the Topic “Operations on Matrixes”. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2 (42), 105–119. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-105-119

Copyright: © M. Ya. Spiridonov (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Beklemishev, D. V. (2015). *Kurs analiticheskoy geometrii i lineynoy algebrы: Uchebnik*. Sankt-Peterburg: Lan'. (In Russ.)
- Bernshteyn, N. A. (1990). *Fiziologiya dvizheniy i aktivnost'*. Moscow: Nauka. (In Russ.)
- Bugrov, Ya. S., Nikol'skiy, S. M. (2004). *Vysshaya matematika. Elementy lineynoy algebrы i analiticheskoy geometrii / Pod red. V.A. Sadovnichego*. Moscow: Drofa. (In Russ.)
- Il'in, V. A., Poznyak E. G. (2005). *Lineynaya algebra*. Moscow: FIZMATLIT. (In Russ.)
- Kostrikin, A. I. (2004). *Vvedeniye v algebru. Chast' I. Osnovy algebrы: Uchebnik dlya vuzov*. Moscow: FIZMATLIT. (In Russ.)
- Kurosh, A. G. (2021). *Kurs vysshey algebrы*. Sankt-Peterburg: Lan'. (In Russ.)
- Markuvinas, I. V. (2021). Melkaya motorika kak sredstvo razvitiya rechi. *Nauka i real'nost' (Science&Reality): setevoy zhurn*, 2(6), 71–72. Retrieved from <https://cyberleninka.ru/article/n/melkaya-motorika-kak-sredstvo-razvitiya-rechi> (In Russ.)
- Postnikov, M. M. (2009). *Analiticheskaya geometriya. Lektsii po geometrii. Chast' I*. Sankt-Peterburg: Lan'. (In Russ.)
- Postnikov, M. M. (2009). *Lineynaya algebra. Lektsii po geometrii. Chast' II*. Sankt-Peterburg: Lan'. (In Russ.)
- Pyataya Gazeta. (2024) / *Uchreditel' A.L. Meller. Svid-vo PI № FS77-62381*. Moscow. 17 dek. 51 (400). (In Russ.)

- Smirnov, V. I. (2010). *Kurs vysshey matematiki. Tom III, chast' 1*. Sankt-Peterburg: BKHV-Peterburg. (In Russ.)
- Spiridonov, M. Ya. (2025). O prepodavanii nachal lineynoy algebrы: operatory i matritsy [On teaching the beginnings of linear algebra: operators and matrices]. *Innovatsii v obrazovatel'nom protsesse. Sbornik trudov XXIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyashchyonnoy 70-letiyu osnovaniya instituta, Godu zashchitnika Otechestva, 80-letiyu Pobedy v Velikoy Otechestvennoy voyne, v ramkakh Desyatiletiya nauki i tekhnologiy* (pp. 24–29). Cheboksary: Cheboksarskiy institut (filial) Moskovskogo Politekha. (In Russ., abstract in Eng.)
- Spiridonov, M. Ya. (2022). O vvedenii ponyatiya opredelatelya pri prepodavanii matematiki [On the introduction of the concept of a determinant in teaching mathematics]. *Nauka, tekhnika, pedagogika vysshey shkoly. Novyye tekhnologii. Materialy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Nauka – Obshchestvo – Tekhnologii – 2022»* (pp. 363–371). Moscow: Moskovskiy politekhnicheskiy universitet. (In Russ., abstract in Eng.)
- Spiridonov, M. Ya. (2024). Reflection of the relationship between frequency and probability of an event in teaching practice. *Mathematics at school*, 7, 36–48. DOI: 10.47639/0130-9358_2024_7_36 (In Russ., abstract in Eng.)
- Vinberg, E. B. (2001). *Kurs algebrы*. Moscow: Faktorial Press. (In Russ.)

Information about the author

Mikhail Ya. Spiridonov; Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor; Associate Professor of the Department of Mathematics; Moscow Polytechnic University (Bolshaya Semyonovskaya st., 38, Moscow, 107023, Russian Federation); E-mail: spir.polytech@mail.ru; ORCID: 0000-0003-1895-4737

Статья поступила в редакцию	06.02.2026
Принята к публикации	15.03.2026
Статья опубликована	19.06.2026

МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-120-133

УДК
378.147

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ В ОБРАЗОВАНИИ: НОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКИ

Воробьев Григорий Алексеевич
к. т. н.

Липецкий государственный педагогический университет имени
П. П. Семенова-Тян-Шанского

Фомина Татьяна Петровна
к. ф.-м. н., доцент

Липецкий государственный педагогический университет имени
П. П. Семенова-Тян-Шанского

Аннотация. В данном исследовании рассматриваются вопросы совершенствования математического образования в связи с развитием и распространением технологий искусственного интеллекта (ИИ). В статье обсуждается применение такой разновидности искусственного интеллекта как нейронные сети на различных этапах изучения вероятности и статистики. Особое внимание уделяется решению указанными средствами задач теории вероятностей и математической статистики, а также формированию новых или частично новых заданий для разного уровня обучаемых. Авторы проводят многоаспектное исследование современных средств искусственного интеллекта, предлагают примерную схему получения заданий и методических материалов к ним, разрабатывают комплекс шагов полезных при обучении школьников и студентов математике. В статье отображены данные анкетирования учителей математики, показывающие в целом значительный интерес педагогов к применению ИИ, в том числе в профессиональной деятельности. Однако значительная часть учителей в силу привычки, возраста или определённого скепсиса не использует в полном объёме современные возможности нейронных сетей в своей деятельности. В работе представлены результаты проведённых исследований и рекомендации по их применению в практической деятельности педагогов. В заключение определяются перспективы дальнейшего использования искусственного интеллекта в математическом образовании, включая аспекты, связанные с доступом к технологиям и необходимостью подготовки педагогов. Обращается внимание на то, что грамотное использование ИИ способствует развитию критического мышления, улучшению качества образования и формированию у школьников умений, знаний и навыков по применению современных средств искусственного интеллекта.

Ключевые слова: искусственный интеллект, цифровая трансформация математического образования, обучение, преподаватели, вероятность и статистика

Для цитирования: Воробьев Г.А., Фомина Т.П. Искусственный интеллект в образовании: новые инструменты для преподавателей вероятности и

статистики // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 2 (42). С. 120–133. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-120-133

Права: © Г.А. Воробьев, Т.П. Фомина (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

В 2019 году президент России утвердил «Национальную стратегию развития искусственного интеллекта до 2030 года». В документе указывается «на высокую степень влияния технологических решений, разработанных на основе искусственного интеллекта, на результативность деятельности организаций и человека» (О развитии ИИ, 2019).

Искусственный интеллект, а также технологии и инструменты, созданные на его основе, стали предметом исследований и активно используются в образовательных целях как педагогами высшей школы, так и школьными учителями, в том числе и в обучении математике, целью чего является персонализация учебного процесса, адаптация заданий под индивидуальные потребности обучающихся и улучшение понимания сложных концепций.

ИИ успешно применяется в некоторых образовательных программах, улучшает качество обучения, способствует развитию учащихся, а также облегчает работу преподавателей (Белов, 2023).

Многие исследователи изучают использование этой технологии в обучении школьников, выделяя при этом основные технологии ИИ и отмечая их плюсы (Бабурчина, 2024; Гулынина, 2024; Озерова, 2024).

Среди элементов применения технологии искусственного интеллекта в работе учителя математики исследователи обращают внимание на использование нейронных сетей для решения математических (вероятностных и/или статистических задач), генерирование условий и решений задач или наборов заданий, формирование различного рода отчётов. Предлагаются и другие приёмы использования ИИ, например, в статье Е. И. Горбуновой и В. О. Новицкого описывается применение при изучении математики в старших классах чат-бота на основе использования нейронных сетей, позволяющего выполнять более специализированные задачи, описываемый бот использует технологии обработки естественного языка (NLP) (Горбунова, 2025). ИИ даёт возможность чат-боту формировать в разных сеансах работы различные наборы заданий. Также уделяется внимание анализу позитивных и негативных аспектов генерирования заданий по высшей математике средствами ИИ, в частности с использованием системы DeepSeek (Руссиян, 2025); рассмотрению вопросов генерирования решения типовых задач по теории вероятностей (Гордин, 2025); выявлению функциональных возможностей ИИ, определению места и роли искусственного интеллекта при обучении школьников и студентов теории вероятностей (Яремко, 2024); созданию практико-ориентированных задач и интерактивных учебных модулей с помощью нейросети, что способствует формированию математической грамотности (Курченкова, 2024).

В литературе описываются и другие сферы применения нейронных сетей в профессиональной деятельности педагога, например, для «определения содержания компонентов инновационной образовательной среды современной образовательной организации, в проектировании и функционировании которой используются технологии искусственного интеллекта» (Юйхань, 2026). В статье В. Д. Полежаева и Л. Н. Полежаевой отмечается применение ИИ-модуля «МЭШ» (Московская электронная школа) для анализа успеваемости и планирования тематики повторения (Полежаев, 2025).

Таким образом, аспекты применения ИИ, рассматриваемые в данном исследовании, достаточно активно обсуждаются в научно-методической литературе, но многие особенности требуют дальнейшего изучения.

Цель статьи – выявить функциональные возможности искусственного интеллекта и на их основе определить сферы применения ИИ при изучении теории вероятностей и статистики школьниками, а также обосновать роль интеллектуальных инструментов в обучении данным дисциплинам.

Методология и методы исследования

Методологической основой исследования является деятельностный подход (при его реализации усвоению подлежат не только знания, но и деятельность) и дидактика цифровой трансформации образования (Роберт, 2024).

В процессе работы были применены такие общенаучные методы, как анализ литературы по теме исследования, изучение существующего педагогического опыта по данной теме, анкетирование на применение ИИ в обучении, описательная статистика (частотный анализ).

Результаты

В начале исследования для определения уровня применения искусственного интеллекта (нейронных сетей) преподавателями, как для решения задач, так и в методических целях было проведено анкетирование среди учителей математики образовательных учреждений г. Липецка и Липецкой области, в том числе, преподающих вероятность и статистику. В тестировании участвовало свыше 80 педагогов, 80% из которых работают в городских школах, а 20% – в сельских школах.

Предлагались следующие вопросы:

1. Применяете ли Вы в своей профессиональной деятельности ИИ?

Варианты ответов:

- нет, не применяю и не пробовал использовать (23,8 %);
- пробовал(а) применять, но пока не обнаружил(а) целесообразности использования (9,5%);
- применяю ИИ, но только для решения задач (2,4%);
- применяю ИИ, но только для генерирования разного рода отчетов (16,7%);
- применяю ИИ, но только для составления заданий;
- использую ИИ в различных целях (38,1%);
- затрудняюсь ответить.

2. Частота применения Вами ИИ в профессиональной деятельности?

Варианты ответов:

- не применяю или применяю очень редко (42,9%);
- несколько раз в месяц (31%);
- несколько раз в неделю (16,7%);
- почти ежедневно (9,5%);
- затрудняюсь ответить.

3. Если Вы применяете ИИ для решения задач по вероятности и статистике, то укажите примерный процент правильных решений, предлагаемых нейронной сетью.

Варианты ответов: не применяю (61,9%); не больше 30%; от 30% до 60% (4,8%); от 60% до 80% (14,3%); от 80% до 90% (9,5%); свыше 90% (2,4%).

4. Используете ли Вы ИИ для генерирования задач? Укажите степень Вашей удовлетворённости составляемыми задачами.

Варианты ответов:

- не применяю или применяю очень редко (58,7%);
- большинство заданий устраивает (8,7%);
- большинство заданий подходят, но после серии вспомогательных запросов (13%);
- часто применяю задания после собственной их модификации;
- примерно третью часть сгенерированных заданий не использую (4,3%);
- применяю примерно только половину сформированных задач (2,2%);
- большинство сгенерированных заданий не нравятся.

5. Какие системы искусственного интеллекта Вы применяете или применяли? Упоминались ChatGPT, DeepSeek, Claude, Yandex GPT, Grok, QWEN, Perplexity, Гигачат от Сбербанка, содержащий элементы искусственного интеллекта сервис «Яндекс.Учебник» используется преподавателями для автоматической проверки домашних заданий.

6. Планируете ли Вы расширить сферу использования ИИ в Вашей профессиональной деятельности? (76,2% респондентов планируют больше применять нейронные сети).

В скобках указаны относительные частоты, т. е. доли респондентов, выбравших определенный вариант ответа, в процентах.

В целом, проведенное анкетирование показывает наличие интереса педагогов к различным аспектам применения искусственного интеллекта, в том числе в профессиональной деятельности. Однако значительная часть учителей не использует в полном объеме современные возможности нейронных сетей в своей деятельности. Также большинство педагогов применяет ИИ только для формирования разного рода отчетов и/или для решения задач (причем для решения задач использует его достаточно редко). Методические возможности, предоставляемые сейчас инструментами ИИ для подготовки к урокам или занятиям в системе дополнительного образования, педагоги применяют в малой мере. На наш взгляд требуется обращение повышенного внимания на соответствующие темы в методических дисциплинах педагогических вузов, системе повышения квалификации преподавателей математики, теории вероятностей и статистики, в частности, при проведении заседаний методических объединений учителей математики. Для студентов педагогических вузов нами предлагается серия тем выпускных квалификационных работ направленных, в том числе, и на решение выявленных проблем: «Применение современных нейронных сетей для формирования методических материалов курса олимпиадной подготовки по математике», «Использование искусственного интеллекта для расширения комплекта дидактических материалов по школьному курсу «Вероятность и статистика», «Межпредметные связи математики и информатики в контексте использования современных средств искусственного интеллекта», «Анализ возможностей применения нейронных сетей для формирования методических материалов по школьному курсу информатики».

Нами были проанализированы некоторые возможности ИИ при решении вероятностных задач, генерировании системы упражнений и другого учебно-методического материала по запросам.

ИИ работает с огромными объемами данных, теория вероятностей помогает ему выявлять скрытые зависимости между различными параметрами внутри данных, что открывает возможности для точного прогнозирования событий; принимать решения в условиях неопределенности, когда исход события заранее неизвестен; улучшать точность работы, повышать эффективность выполнения поставленных задач и реализовывать иные функции. Теория вероятностей является основой современного ИИ, помогая ему учиться на данных, принимать решения и улучшать свои алгоритмы. В свою очередь, ИИ вносит заметный вклад в современное математическое образование, в том числе в преподавание теории вероятностей и статистики.

Запрос, по которому нейросеть генерирует ответ, называется промптом (от англ. prompt – «подсказка»). «Промт-инжиниринг» – это искусство задавания таких вопросов (Токтарова, 2026).

Попытаемся проанализировать не только запросы к ИИ на решение задач, но и запросы на составление различного рода заданий. Последний вариант может оказать существенную помощь преподавателю. Поэтому современные педагоги не только ругают ИИ за то, что учащиеся вместо самостоятельного решения задач используют нейронные сети, но и сами активно генерируют комплекты заданий.

На наш взгляд запрос к нейронной сети на формирование заданий по теории вероятностей может включать нижеперечисленные элементы:

1. Тематика и уровень сложности.

МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Указание конкретной темы, раздела, используемого теоретического материала (например, «классическое определение вероятности», «произведение вероятностей», «обход дерева», «условная вероятность» и т. д.). Конечно, возможно указание комбинаций нескольких теоретических компонентов.

Уровень сложности (школьный, в том числе с указанием класса, для системы дополнительного образования, формат ОГЭ или ЕГЭ, олимпиадный, студенческий).

2. Количество заданий в подборке.

Возможно указание в запросе на объединение задач общей тематикой, конкретными персонажами, постепенное увеличение уровня сложности заданий, использование других вариантов компоновки группы заданий.

3. Тип задачи.

Теоретические вопросы, формулы, базовые задачи (например, «Подскажите формулу Бернулли»).

Практические расчётные задачи (например, «Сформулируйте задачу на подсчёт вероятности некоторого конкретного набора получаемых значений при трёх бросках игрального кубика»).

Задачи на доказательство («Докажите формулу Бернулли»).

Графические/интерпретационные задачи («Сформулируйте задачу на построение функции распределения для дискретной случайной величины»).

Комбинированные задания.

4. Указание определённых ограничений, параметров, условий.

Параметры («Задача про игральную кость с N гранями»).

Ограничения (например, «Требуются задачи, в которых не нужно выполнять округление вычислений»).

Контекст (можно указать начало формулировки задачи, доверив нейронной сети её завершение и решение, например, «Вероятность поломки инструмента за год равна 0,1. Найдите...»).

Конкретные объекты, персонажи, упоминаемые в условии задачи (задачи о шахматах, домино, с информацией о конкретном городе, географическом объекте, литературном или киноперсонаже и т. д.)

5. Формат ответа.

Только условие задачи.

Используемый теоретический материал (полезно учителю для подведения школьников к нахождению решения задачи).

Краткое решение.

Решение с пояснениями.

Развернутый ответ с теоретическим обоснованием.

Решение с вопросами для учащихся (если учитель рискнёт доверить ИИ и часть методической деятельности).

6. Дополнительные требования.

Связь с другими разделами теории вероятностей и математической статистики («Придумайте задачу на вероятность с элементами комбинаторики»).

Межпредметные связи.

Практические задачи из конкретных разделов деятельности человека (например, «Приведите пример задачи с экономическим, физическим, химическим или иным предметным содержанием»).

Временные ограничения на информацию в сюжете задаче (использование данных из ограниченного промежутка времени в заданиях, например, для отображения свежей информации, данных за последние несколько лет).

7. Дополнение решения задачи определённым методическим материалом (система наводящих вопросов, теоретическая справка или справки, разного рода иллюстративный материал, ссылки на литературные источники или источники в Интернете и прочее).

Условия математических задач и их решения часто изобилуют формулами, поэтому удобны предоставляемые большинством инструментов ИИ возможности предъявления формул в системе LaTeX (по сути – это мини программный код).

Сформируем несколько примеров запросов к нейронной сети и реализуем их (не будем указывать используемый сайт, чтобы избежать обвинений в рекламе):

– Какие особенности имеют задачи на формулу полной вероятности? Проиллюстрируйте каждый выявленный элемент соответствующим практическим примером. Укажите ссылки на источники в Интернете, содержащие соответствующие особенности.

– Сгенерируйте три задачи на формулу Байеса для школьников и студентов второго курса. Задачи должны быть по нарастанию уровня сложности и на общую тематику. Укажите уровень округления ответов. В условиях задач должен упоминаться город Липецк. Дополнительно в запросе можно указать требуется ли отобразить решения задач (по умолчанию) или достаточно только условий заданий.

– Составьте задачу олимпиадного уровня про случайные блуждания с ответом.

– Постройте задачу для старшеклассников на вычисление математического ожидания дискретной случайной величины в контексте спортивной статистики. В задании должны использоваться данные за 2024–2025 годы по Липецкой области. Сформулируйте два-три подводящих вопроса для упрощения решения задачи школьниками.

Как результат второго из указанных запросов предлагаются следующие задания.

1 (начальный уровень). Синоптики Липецкого гидрометцентра заметили, что в ноябре в Липецке солнечный день бывает с вероятностью 0,3. Если день солнечный, то вероятность того, что на следующий день пойдет дождь, равна 0,2. Если день пасмурный, то вероятность дождя на следующий день равна 0,6. В среду в Липецке прошёл дождь. Какова вероятность того, что во вторник было солнечно?

2 (средний уровень). На Новолипецком металлургическом комбинате (НЛМК) есть две автоматические линии по производству стальной проволоки. Первая линия производит 60% всей продукции, вторая – 40%. Брак в продукции первой линии составляет 1%, а второй – 3%. Контроль качества взял на проверку случайную единицу продукции. Обнаружен брак. Какова вероятность того, что эта проволока была произведена на второй линии? Ответ округлите до тысячных.

Авторы данного исследования проверили информацию на сайте ПАО «НЛМК», стальная проволока на комбинате действительно производится, только возможно не в городе Липецке.

3 (высокий уровень). В Липецке проводится плановая диспансеризация на предмет выявления определенного заболевания. Известно, что распространенность этого заболевания среди взрослого населения города составляет 0,5%. Для диагностики используется тест с точностью 98% (если человек болен, тест положителен с вероятностью 0,98; если здоров, тест отрицателен с вероятностью 0,98). Случайно выбранный житель Липецка прошёл тестирование, и результат оказался положительным. Какова вероятность (с точностью до тысячных) того, что этот человек действительно болен?

Видим, что общая тематика заданий по результатам запросов не была определена.

Результатом выполнения четвёртого запроса является следующая задача.

По итогам чемпионата России по футболу среди команд второй лиги сезона 2025 года футбольный клуб «Металлург» (Липецк) провёл на своём поле 14 матчей. Статистика забитых командой голов в этих матчах представлена в таблице 1, здесь X – это количество мячей, забитых ФК «Металлург» в очередном домашнем матче.

Статистика мячей, забитых командой «Металлург» (Липецк)
в домашних матчах сезона 2024–2025 годов

Количество голов, забитых «Металлургом» в домашнем матче (X)	0	1	2	3
Количество матчей (m)	3	5	5	1

Вычислите математическое ожидание $M(X)$ количества голов, забитых ФК «Металлург» в домашнем матче. Результат округлите до сотых. Что означает полученное значение для тренерского штаба команды?

Наводящие вопросы. По данным таблицы определите, какое количество голов команда забивала чаще всего и реже всего? Чему равна вероятность того, что в случайно выбранном домашнем матче команда забьёт 3 гола? Запишите закон распределения случайной величины.

Вопрос на проверку условия нормировки. Чему равна сумма всех вероятностей p_i ? Убедитесь, что сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1. Если это не так, проверьте правильность вычисления вероятностей.

Рекомендации по применению формулы. Напишите общую формулу для вычисления математического ожидания дискретной случайной величины. Подставьте в неё данные из составленного Вами закона распределения и выполните расчёт.

Первый из предложенных запрос оказался не совсем удачным, нейронная сеть лишь частично поняла запросы авторов исследования. Были предложены следующие ключевые особенности задач на формулу полной вероятности:

- наличие гипотез, образующих полную группу несовместных событий;
- вероятности гипотез известны (даны или их можно вычислить);
- известны условные вероятности некоторого события A относительно каждой гипотезы;
- требуется найти полную (безусловную) вероятность события A .

Ссылки на источники в Интернете, содержащие соответствующие особенности, предъявлены не были. Однако дополнительно в результате запроса был отображён алгоритм решения задачи на формулу полной вероятности (рис. 1):

Итог

Таким образом, алгоритм решения задачи на формулу полной вероятности выглядит так:

1. Определить гипотезы H_1, H_2, \dots, H_n , которые образуют полную группу.
2. Найти вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$.
3. Определить условные вероятности события A для каждой гипотезы:
 $P(A|H_1), P(A|H_2), \dots, P(A|H_n)$.
4. Применить формулу полной вероятности для вычисления $P(A)$.
5. (Если требуется) Применить формулу Байеса для переоценки гипотез после наступления события A .

Рис. 1. Алгоритм решения задачи на формулу полной вероятности

Рассмотрим условия заданий, предложенные нейронной сетью в анализируемом случае. В рассматриваемых вариантах термины «особенность» и «задача» даны ИИ, хотя в действительности речь идёт об иллюстрирующих примерах.

Особенность 1: наличие гипотез, образующих полную группу.

1.1. (Производственные линии). На фабрике коробки с конфетами производятся на трёх производственных линиях. Первая линия производит 35% всех коробок, вторая – 40%, третья – 25%.

1.2. (Студенческие группы). В группе студентов 20% первокурсников, 30% второкурсников, 40% третьекурсников и 10% обучающихся четвёртого курса.

1.3. (Лабораторный анализ). Для анализа крови в лаборатории могут поступить образцы из трех разных клиник: 50% из первой, 30% из второй и 20% из третьей.

Особенность 2: известны условные вероятности события A .

2.1. (Бракованная продукция) Процент бракованных коробок различен для разных линий: на первой линии – 2%, на второй – 1.5%, на третьей – 3%.

2.2. (Успешная сдача экзамена) Вероятность успешной сдачи экзамена по статистике для первокурсников составляет 0.5, для второкурсников – 0,7, для третьекурсников – 0,8, для четверокурсников – 0,9.

Особенность 3: требуется найти полную вероятность события A .

3.1. (Общий брак) Какова вероятность того, что случайно выбранная со склада коробка окажется бракованной?

3.2. (Общая успеваемость) Какова вероятность того, что случайно выбранный студент из группы успешно сдаст экзамен?

Особенность 4: задача как шаг к формуле Байеса.

4.1. (Происхождение бракованной коробки). Наугад выбранная коробка оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она была произведена на третьей линии?

4.2. (Определение курса студента) Студент успешно сдал экзамен. Какова вероятность того, что он является второкурсником?

В предложенных заданиях нейронная сеть распределила входные данные условия задач и вопросы (заключение задачи) в разные разделы (особенности).

Чем точнее запрос, тем более релевантный результат удастся получить. При дальнейшей работе можно видоизменять результат, дополняя или модифицируя требования к формируемым задачам. Например, можно изменить уровень сложности заданий, добавить дополнительный раздел теоретического материала, рекомендуемый к применению, новый объект или другого персонажа, выполнить другие модификации.

Конечно, модифицировать задания можно не только с помощью искусственного интеллекта, но и используя компетенции педагога. Возможен и некоторый соревновательный элемент, изменить задачу так, чтобы её не сумела решить нейронная сеть, предложившая первоначальный вариант задачи.

В рамках данного исследования мы предлагаем примерную схему (рис. 2) формирования вероятностных заданий разного уровня сложности с помощью ИИ, возможна разработка и серии задач.



Рис.2. Примерная схема формирования заданий с помощью ИИ

Конечно, использование нейронных сетей для решения методических вопросов при подготовке преподавателя к занятию – это лишь маленькая часть всех возможностей, которые дают современные средства искусственного интеллекта педагогу. Одной из самых быстро развивающихся функций ИИ является возможность решения математических задач. Рассмотрим применение ИИ в решении ряда задач, используемых в обучении школьников вероятности и статистике. Проведённый анализ не претендует на глобальность и носит иллюстративный характер. Первый этап решения задач выполнялся осенью 2024 года.

1. Каждый регион на выставке занимает свою позицию. В центральный федеральный округ входят 18 регионов. Какова вероятность того, что позиции Липецкой, Воронежской и Тамбовской областей окажутся рядом, если стенды регионов расположены последовательно?

Решение ИИ (некоторые элементы решения обрезаны для уменьшения объёма решения, вычисления значений факториалов от достаточно больших чисел также убраны).

1. Найти общее число возможных вариантов расположения 18 регионов. Общее число возможных вариантов равно числу перестановок из 18 элементов: $P(18) = 18!$

2. Определить число вариантов с Липецкой, Воронежской и Тамбовской областями, расположенными рядом. Рассмотрим эти три области как одну группу. Тогда задача сводится к определению числа перестановок из 16 элементов ($18 - 3 + 1 = 16$). Внутри группы из трёх областей существует $3! = 6$ возможных вариантов расположения.

Таким образом, число вариантов с требуемым расположением областей равно $16! \cdot 6$.

3. Вычислить вероятность. Вероятность того, что Липецкая, Воронежская и Тамбовская области окажутся рядом, равна: Вероятность = $(6 \cdot 16!) / 18! = 0,0196$.

ИИ с решением справился.

2. В двух коробках лежали белые и красные шары, причём в первой коробке на каждые четыре белых шара приходилось три красных, а во второй коробке на каждые три белых шара приходилось два красных. Все шары высыпали в один мешок, хорошо перемешали и теперь из мешка собираются вынуть один случайный шар. Три математика делают прогнозы. Первый: «Шар окажется белым с вероятностью $7/12$ ». Второй: «Шар окажется белым с вероятностью $11/19$ ». Третий: «Шар окажется белым с вероятностью $19/35$ ». Кто из математиков может оказаться прав? В какой ситуации?

При решении этой задачи искусственный интеллект, в рассматриваемой нами реализации, попадает в ловушку. Сайт предлагает только решение для случая фиксированного количества шаров: 4 белых и 3 красных в первой коробке, 3 белых и 2 красных во второй коробке.

Следующая задача предлагалась в рамках командного соревнования «Математики против программистов» на летней профильной смене, поэтому часть числовых данных носили шуточный утрированный характер (например, количество ступенек).

3. Андрей после экскурсий сильно устал и был полон впечатлений настолько, что, когда добрался до одного из этажей гостиничного корпуса, то полностью потерял чувство направления. Он не помнит, на каком этаже его комната. Более того, на каждой ступеньке он с вероятностью 50% продолжает идти вперед, а иначе разворачивается и идет назад. Он настолько потерял связь с реальностью, что может даже пройти мимо своего этажа и не заметить этого!

Пройдя 1000 ступенек, Андрей засыпает прямо на лестнице. Проснувшись, он пытается определить для себя: какой у него был шанс заснуть рядом со своим этажом? Ведь от этажа, где Андрей потерял чувство направления, до его этажа всего 100 ступенек. Вычислите вероятность Андрея заснуть на его этаже. Корпус достаточно высок, Андрей смог пройти 1000 ступенек не поворачивая назад, как вверх, так и вниз.

Решение последней задачи серьезно «запутало» искусственный интеллект, ИИ предложил воспользоваться «свойством случайных блужданий», но сгенерированный ответ значительно отличался от истинного.

При тестировании решения двух последних задач в октябре 2025 года проблем выполнение заданий у ИИ не было. В целом практическое использование средств ИИ показывает значительный рост качества выполнения заданий за последний год.

В рамках проведённого исследования нами, конечно, рассматривались и другие примеры. Таким образом, без проведения серьезного многоаспектного анализа и рассмотрения множества примеров всё-таки можно сделать вывод, что уже сейчас ИИ хорошо справляется с достаточно стандартными задачами на теорию вероятностей, но его пока достаточно просто ввести в заблуждение, усложнив формулировку задачи. Хотя присутствует и множество проблем: проверка результатов запросов, риск снижения методической компетенции учителя при избыточном использовании ИИ, определение авторских прав на полученный в результате работы генеративных нейронных сетей контент и многое другое.

Использование нейронных сетей в методической деятельности преподавателя не ограничивается решением задач и составлением заданий или их наборов. Возможно формирование и других методических компонентов. Например, вопросов, подводящих обучаемых к нахождению решения, того или иного иллюстративного материала, других элементов.

Заключение

В рассматриваемой предметной области представляется перспективным и полезным интеграция различных подходов к развитию математического образования школьников.

Прогресс в развитии искусственного интеллекта, в том числе в области решения вероятностных задач и формулирования таких задач, остановить не получится. Поэтому преподавателю нужно стремиться максимально использовать предоставляемые нейронными сетями возможности для получения образовательных результатов.

При обучении школьников и студентов теории вероятностей и математической статистики у педагогов и обучающихся должно быть сформировано четкое представление о том, что ИИ – это лишь современное средство, грамотное использование которого позволит повысить эффективность учебного процесса. Для этого необходимо освоить умения формулировать запрос, сопоставлять информацию, выданную ИИ, с известными данными, выяснять, нет ли противоречий, т. е. овладеть цифровыми компетенциями.

Список литературы

- Бабурчина А.И. Использование ИИ в преподавании математики для школьников среднего и старшего звена // Вестник науки. 2024. Том 5. № 9 (78). С. 553–579.
- Белов М.С. Искусственный интеллект в обучении математике в вузе // Современные тенденции естественно-математического образования: материалы XII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, 7–8 апреля 2023 года / Соликамский государственный педагогический институт (филиал) ФГАОУ ВО «ПГНИУ». Соликамск: СГПИ; ООО «Типограф», 2023. С. 3–6.
- Горбунова Е.И., Новицкий В.О. Разработка чат-бота для обучения школьников старших классов по дисциплине «Математика» на основе использования нейросетей // Управление образованием: теория и практика. 2025. № 7-1. С. 146–159. DOI: 10.25726/u0319-6545-6537-b.
- Гордин С.А. Искусственный интеллект в преподавании математики // Интерактивные методы в обучении математике: Сборник материалов XII Региональной научно-практической конференции, Комсомольск-на-Амуре, 11 апреля 2025 года. Комсомольск-на-Амуре: Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет, 2025. С. 4–7.
- Гулынина Е.В., Омарова А.Д. Искусственный интеллект и персонализированное обучение: перспективы и вызовы в контексте преподавания математики // Педагогическое образование в России. 2024. №4. С. 82–92.

- Курченкова Г.М., Савина Н.В. Использование нейросети в процессе формирования математической грамотности // Информатизация образования: теория и практика: Сборник материалов Международной научно-практической конференции памяти академика РАО М.П. Лапчика, Омск, 22-23 ноября 2024 года. Омск: Омский государственный педагогический университет, 2024. С. 331–334.
- О развитии искусственного интеллекта в Российской Федерации: Указ Президента РФ от 10.10.2019 № 490 (ред. от 15.02.2024) // Собрание законодательства Российской Федерации. 2019. № 41.
- Озерова А.О. Как искусственный интеллект помогает в работе учителя // Вестник науки. 2024. Т. 2. №1 (70). С. 555–559.
- Полежаев В.Д., Полежаева Л.Н. Влияние искусственного интеллекта на преподавание математики // Инновационные технологии в современном образовании: Материалы VII Международной научно-практической конференции, Тирасполь, 28 февраля 2025 года. Тирасполь: Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко, 2025. С. 72–77.
- Роберт И.В. Искусственный интеллект в образовании: направления реализации // Современное образование в поликультурном мире: тенденции и перспективы развития: материалы международной научно-практической конференции, Махачкала, 03-08 октября 2023 года. Махачкала: ООО «Издательство АЛЕФ», 2024. С. 25–36. DOI: 10.33580/9785002124411_25
- Руссиян С.А., Логачева О.М., Логачев А.В. Перспектива применения искусственного интеллекта DeepSeek при обучении математическим дисциплинам // Сборник научно-методических работ: Материалы Первой Всероссийской научно-методической конференции, Донецк, 28–29 мая 2025 года. Донецк: Донецкий национальный технический университет, 2025. С. 175–182.
- Садыкова А.Р., Левченко И.В. Искусственный интеллект как компонент инновационного содержания общего образования: анализ мирового опыта и отечественные перспективы // Вестник РУДН. Серия: Информатизация образования. 2020. Т. 17. №3. С. 201–209. DOI: 10.22363/2312-8631-2020-17-3-201-209.
- Токтарова В.И., Ребко О.В., Семенова Д.А. Промпт-инженерия в контексте научного познания: типология и практика применения // Информатика и образование. 2026. 41(1). С. 8–22. DOI: 10.32517/0234-0453-2026-41-1-8-22
- Юйхань М., Гукаленко О.В., Пустовойтов В.Н. Технологии искусственного интеллекта как инструмент системной интеллектуализации образовательной среды. Информатика и образование. 2026. 41(1). С. 49–56. DOI: 10.32517/0234-0453-2026-41-1-49-56
- Яремко Н. Н., Селютин В. Д., Яковлева Ю. А. Обучение теории вероятностей с использованием искусственного интеллекта // Мир науки. Педагогика и психология. 2024. Т. 12. № 5.

Информация об авторах

Воробьев Григорий Алексеевич; кандидат технических наук; доцент кафедры информатики, информационных технологий и защиты информации; ФГБОУ ВО «Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского» (Российская Федерация, 399020, г. Липецк, Липецкая область, ул. Ленина, д. 42); E-mail: vorobjev_g_a@mail.ru; ORCID: 0000-0001-8688-8829; Scopus ID: 57204105579;

Фомина Татьяна Петровна; кандидат физико-математических наук; доцент; доцент кафедры математики и физики; ФГБОУ ВО «Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского» (Российская Федерация, 399020, г. Липецк, Липецкая область, ул. Ленина, д. 42); E-mail: fomina_t_p@mail.ru; ORCID: 0000-0002-5300-326X; Scopus ID: 57202222365

ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN EDUCATION: NEW TOOLS FOR TEACHERS OF PROBABILITY AND STATISTICS

Vorobyov G. A.
Dr. Sci. (Technical), Associate Professor

Fomina T. P.
Ph. D. (Physics and Mathematics),
Associate Professor

Semenov-Tyan-Shansky Lipetsk State Pedagogical University

Semenov-Tyan-Shansky Lipetsk State Pedagogical University

Abstract. This study examines the improvement of mathematical education in connection with the development and spread of artificial intelligence (AI) technologies. The article discusses the use of a type of artificial intelligence called neural networks at various stages of studying probability and statistics. Special attention is paid to solving probability theory and mathematical statistics problems using these tools, as well as creating new or partially new tasks for different levels of students. The authors analyze various aspects of modern artificial intelligence tools, propose a sample scheme for receiving tasks and methodological materials for them, and develop a set of steps that are useful for teaching mathematics to schoolchildren and students. The article presents the results of a survey conducted among mathematics teachers, which show a significant interest in using AI, including in their professional activities. However, due to habits, age, or a certain degree of skepticism, many teachers do not fully utilize the modern capabilities of neural networks in their work. The paper presents the results of the conducted research and recommendations for their application in the practical activities of teachers. In conclusion, the prospects for further use of artificial intelligence in mathematical education are determined, including aspects related to access to technology and the need for teacher training. Attention is drawn to the fact that the competent use of AI contributes to the development of critical thinking, improving the quality of education, and developing students' skills, knowledge, and abilities to use modern artificial intelligence tools.

Keywords: artificial intelligence, digital transformation of mathematics education, learning, schoolchildren, students, teachers, probability, and statistics

For citation: Vorobyov G.A., Fomina T.P. Artificial Intelligence in Education: New Tools for Probability and Statistics Teachers. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2 (42), 120–133. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-120-133

Copyright: © G. A. Vorobyov, T. P. Fomina (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Baburchina, A. I. (2024). Using AI in Teaching Mathematics to Middle and High School Students. *Bulletin of Science*, 5, 9 (78), 553-579. (In Russ).
- Belov, M. S. (2023). Artificial Intelligence in Teaching Mathematics at a University. *Modern Trends in Natural Science and Mathematics Education: Proceedings of the XII All-Russian Scientific and Practical Conference with International Participation, April 7-8, 2023. Solikamsk State Pedagogical Institute (Branch) of the Perm State National Research University, T. V. Richter, compilation* (pp. 3-6). Solikamsk: SSPI; Typograf LLC. (In Russ).

- Gorbunova, E. I., Novitsky, V. O. (2025). Development of a Chatbot for Teaching High School Students Mathematics Using Neural Networks. *Education Management: Theory and Practice*, 7-1, 146-159. (In Russ).
- Gordin, S. A. (2025). Artificial Intelligence in Teaching Mathematics. *Interactive Methods in Teaching Mathematics: Collection of Materials of the XII Regional Scientific and Practical Conference, Komsomolsk-on-Amur, April 11*, (pp. 4-7). Komsomolsk-on-Amur: Amur State University of Humanities and Education. (In Russ).
- Gulinina, E. V., Omarova, A. D. (2024). Researcher and Personalized Research: Experiments and Developments in the Field of Mathematics Development. *Pedagogical Education in Russia*, 4, 82-92. (In Russ).
- Kurchenkova, G. M., Savina, N. V. (2024). Using a Neural Network in the Process of Forming Mathematical Literacy. *Informatization of Education: Theory and Practice: Collection of Materials of the International Scientific and Practical Conference in Memory of Academician of the Russian Academy of Education M. P. Lapchik, Omsk, November 22-23*. (pp. 331-334). Omsk: Omsk State Pedagogical University. (In Russ).
- On the Development of Artificial Intelligence in the Russian Federation: Decree of the President of the Russian Federation No. 490 dated 10.10.2019 (as amended on 15.02.2024) (2019). *Collection of Laws of the Russian Federation*, 41. (In Russ).
- Ozerova, A. O. (2024). How Artificial Intelligence Helps Teachers. *Bulletin of Science*, 2, 1 (70), 555-559. (In Russ).
- Polezhaev, V. D., Polezhaeva, L. N. (2025). The Influence of Artificial Intelligence on Teaching Mathematics. *Innovative Technologies in Modern Education: Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference, Tiraspol, February 28*. (pp. 72-77). Tiraspol: Taras Shevchenko Pridnestrovian State University. (In Russ).
- Robert, I. V. (2024). Artificial Intelligence in Education: Directions of Implementation. *Modern Education in a Multicultural World: Trends and Prospects of Development: Materials of the International Scientific and Practical Conference, Makhachkala, October 03-08*. (pp. 25-36). Makhachkala: ALEF Publishing House LLC. (In Russ).
- Russian, S. A., Logacheva, O. M., Logachev, A. V. (2025). Prospects for the Use of DeepSeek Artificial Intelligence in Teaching Mathematical Disciplines. *Collection of Scientific and Methodological Works: Materials of the First All-Russian Scientific and Methodological Conference, Donetsk, May 28-29*. (pp 175-182). Donetsk: Donetsk National Technical University. (In Russ).
- Sadykova, A. R., Levchenko, I. V. (2020). Artificial Intelligence as a Component of Innovative Content in General Education: Analysis of Global Experience and Domestic Prospects. *RUDN University Bulletin. Series: Information Technology in Education*, 3, 201-209. (In Russ).
- Toktarova, V. I., Rebko, O. V., Semenova, D. A. (2026). Prompt engineering in the context of scientific inquiry: Typology and practice of application. *Informatics and education*, 41(1), 8-22. (In Russ., abstract in Eng.). DOI: 10.32517/0234-0453-2026-41-1-8-22
- Yaremko, N. N., Selyutin, V. D., Yakovleva, Yu. A. (2024). Teaching Probability Theory Using Artificial Intelligence. *World of Science. Pedagogy and Psychology*, 12. 5. Retrieved from URL: <https://mir-nauki.com/PDF/60PDMN524.pdf>. (In Russ).
- Yuhan, M., Gukalenko, O. V., Pustovoitov, V. N. (2026). Artificial intelligence technologies as a tool for systemic intellectualization of the educational environment. *Informatics and education*, 41(1), 49-56. (In Russ., abstract in Eng.). DOI: 10.32517/0234-0453-2026-41-1-49-56

Information about the authors

Grigory A. Vorobyov; Candidate of Technical Sciences; Associate Professor of the Department of Informatics, Information Technologies and Information Security; Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shansky (42 Lenin Street, Lipetsk, 399020, Russian Federation); E-mail: vorobjev_g_a@mail.ru; ORCID: 0000-0001-8688-8829; Scopus ID: 57204105579;

Tatyana P. Fomina; Candidate of Physico-Mathematical Sciences; Associate Professor; Associate Professor of the Department of Mathematics and Physics; Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shansky (42 Lenin Street, Lipetsk, 399020, Russian Federation); E-mail: fomina_t_p@mail.ru; ORCID: 0000-0002-5300-326X; Scopus ID: 57202222365

Статья поступила в редакцию	23.04.2026
Принята к публикации	24.05.2026
Статья опубликована	19.06.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-134-145

УДК
37.091.3:004 | **ОБУЧЕНИЕ ПОДРОСТКОВ РАЗРАБОТКЕ ПРИЛОЖЕНИЙ С
ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ТЕХНОЛОГИИ ИНТЕРНЕТ ВЕЩЕЙ**

Смолянинова Ольга Георгиевна | Сибирский федеральный университет,
д.п.н., академик РАО, профессор
Ануфриенко Евгений Константинович | Сибирский федеральный университет,
аспирант

Аннотация. Статья посвящена решению проблемы недостаточной мотивации и ограниченных возможностей подростков в освоении современных цифровых технологий в условиях дополнительного образования. Для повышения интереса обучающихся и развития у них навыков проектной деятельности предлагается использовать совмещение дополненной реальности и технологии Интернет вещей для обеспечения взаимосвязи виртуальной и физической среды. Использование данных технологий обеспечивает взаимодействие виртуальной и физической среды, создавая условия для формирования цифровой компетентности, а также раннего профессионального самоопределения подростков в сфере информационных технологий. Цель исследования заключается в теоретическом обосновании и экспериментальной проверке обучения подростков разработке приложений с дополненной реальностью с использованием технологии Интернет вещей. Представлена структура разработанного модуля, а также система учебных заданий, обеспечивающих поэтапное усложнение деятельности. Методологическую основу исследования составили системный и сравнительный анализ научно-педагогических источников, а также опытно-экспериментальная работа, проведенная на базе детского технопарка «Кванториум» (Санкт-Петербург) в 2022–2024 гг. с участием 165 обучающихся. Процедура исследования включала констатирующий, формирующий и итоговый этапы; диагностика осуществлялась по мотивационно-ценностному, теоретическому, операционно-деятельностному и рефлексивно-коррекционному критериям. Результаты итоговой диагностики показали статистически значимую положительную динамику в экспериментальной группе по всем критериям, что подтверждает эффективность разработанного модуля. Отмечено, что выполнение заданий по принципу «от идеи до прототипа» способствует формированию навыков работы с цифровыми платформами и технологией Интернет вещей, а также поддерживает их профессиональное самоопределение в сфере информационных технологий. Перспективы дальнейших исследований связаны с проектированием образовательных модулей нового поколения и созданием «умных» образовательных сред на основе интеграции сквозных цифровых технологий.

Ключевые слова: дополненная реальность, интернет вещей, информатизация образования, подростковый возраст, технологии обучения

Для цитирования: Смолянинова О.Г., Ануфриенко Е.К. Обучение подростков разработке приложений с дополненной реальностью с использованием технологии интернет вещей // Continuum. Математика. Информатика.

Образование. 2026. № 2 (42). С. 134–145. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-134-145

Права: © О.Г. Смолянинова, Е.К. Ануфриенко (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Современный этап развития образования характеризуется активным внедрением сквозных цифровых технологий, среди которых особое место занимают дополненная реальность и технология Интернет вещей. Эти технологии выступают не только инструментами визуализации и автоматизации, но и средствами формирования у обучающихся цифровой компетентности и навыков проектной деятельности.

Дополненная реальность представляет собой цифровое наложение на реальный мир, выраженный в компьютерной графике, тексте или видео, обеспечивающее интерактивное взаимодействие пользователя с цифровым контентом в реальном пространстве (Ануфриенко, 2022). Интернет вещей, в свою очередь, является концепцией пространства, в котором все из аналогового и цифрового миров может быть совмещено (Заславская, 2017).

Разработка мобильных приложений с дополненной реальностью с использованием Интернет вещей открывает новые возможности для образовательной сферы, обеспечивая взаимосвязь виртуального и материального миров, обеспечивая органичное соединение виртуальных моделей с физическими сенсорами и микроконтроллерами. В контексте дополнительного образования подобное сочетание цифровых технологий приобретает особое педагогическое значение, поскольку способствует раскрытию личностного потенциала детей и подростков, формированию профессиональных интересов и развития качеств личности, отраженных в «Концепции развития дополнительного образования детей до 2030 года» (Правительство Российской Федерации. Распоряжение от 31 марта 2022 г. № 678-р «О Концепции развития дополнительного образования детей до 2030 года»). Приоритет обновления содержания и технологий связан с развитием программ технической направленности, ориентированных на освоение трехмерного моделирования, программирования и технологического предпринимательства. Государственная политика акцентирует необходимость формирования у подростков навыков работы с цифровыми технологиями, способствующих раннему профессиональному самоопределению в области информационных технологий.

Обучение подростков разработке приложений с дополненной реальностью и использованием технологий Интернет вещей требует комплексного подхода, включающего освоение принципов работы микроконтроллеров и сенсоров, проектирования интерактивных сцен и разработку сценариев взаимодействия виртуальных и реальных объектов. Подобное использование технологий способствует созданию условий для реализации проектной деятельности, при которой подростки создают цифровые прототипы, реагирующие на изменение параметров окружающей среды (освещенность, температуру, движение и др.), и способны наблюдать результаты работы в реальной жизни. Реализация образовательного процесса по принципу «от идеи до прототипа» формирует у обучающихся самостоятельность, ответственность и готовность к инновационной деятельности.

Вместе с тем внедрение данных технологий требует научно-методического обоснования, разработки педагогических условий, обеспечивающих их эффективное сочетание, и подготовки педагогов, способных использовать цифровые средства и технологии в образовательном процессе. Анализ образовательной практики показывает, что педагоги недостаточно готовы к реализации подобных направлений, а учебно-методическая база не обеспечивает переход от визуального моделирования к разработке проектов.

Методология исследования

Методологическую основу исследования составили системный и сравнительный анализ научно-педагогических источников, а также эмпирическая апробация разработанно-

го учебного модуля, направленного на обучение подростков разработке приложений с дополненной реальностью и элементами технологии Интернет вещей. При планировании исследования использовались принципы научной обоснованности, системности, активности обучающихся и практической направленности.

Опытно-экспериментальное исследование, включающее проверку результативности разработанного модуля программы, проводилось в 2022–2024 учебных годах на базе государственного бюджетного учреждения дополнительного образования «Центр развития творчества и научно-технических инициатив детей и молодежи» Калининского района Санкт-Петербурга (структурное подразделение – детский технопарк «Кванториум»). В исследовании приняли участие 165 подростков в возрасте от 12 до 17 лет.

Результаты

Современные исследования в области цифровой дидактики показывают, что дополненная реальность и Интернет вещей относятся к сквозным технологиям, обладающим высоким образовательным потенциалом. В педагогическом контексте разработка приложений с дополненной реальностью позволяет переводить теоретические знания в плоскость практического опыта, когда обучающийся не просто воспринимает информацию, а взаимодействует с ней в интерактивной форме.

Технология Интернет вещей расширяет этот потенциал, объединяя цифровые датчики и устройства для взаимодействия между собой и с внешней средой. В исследовании В.П. Куприяновского и других ученых отмечается, что использование датчиков и устройств управления промышленных станков с системами автоматизированного проектирования способно улучшить качество производства и эффективность, попутно снижая затраты (Куприяновский, 2016). В исследовании А.А. Вахрушевой отмечается, что использование Интернет вещей позволит оптимизировать логистику в транспортной отрасли, осуществляя контроль за перемещением продукции, а также снизить себестоимость продукции (Вахрушева, 2017). Данные исследования подтверждают актуальность данного направления: освоение технологии Интернет вещей позволяет обучающимся анализировать данные окружающей среды, выявлять причинно-следственные связи и конструировать «умные» устройства, реагирующие на реальные события, что способствует их ранней профессиональной ориентации в сфере информационных технологий.

В образовательной сфере Интернет вещей преимущественно рассматривается как составляющая информационно-образовательной среды, а не как содержательного контента образования (Китайгородский, 2019). Подобный опыт рассмотрен в исследовании В.Г. Зубкова, И.И. Колтунова и А.В. Акимова при проектировании лабораторных работ для студентов технических специальностей (Зубков, 2012), а также в исследовании А.А. Гальчук и А.Н. Сергеева (Гальчук, 2017), описывающего возможности использования методики распределенного обучения информатике с помощью технологий Интернет вещей. Однако в данных исследованиях не предусматривается переход от теоретического изучения принципов работы к практической реализации проектов, в которых обучающиеся самостоятельно проектируют взаимодействие физических и виртуальных объектов, что подтверждает актуальность исследования.

Особое значение данный процесс приобретает в подростковом возрасте, который, по определению А.Г. Асмолова, связан с развитием индивидуальности и поиском собственных форм самореализации. Ученый отмечает, что «дополнительное образование в эпоху перемен – это зона ближайшего развития школы и общего образования в целом... превращающая творчество детской и подростковой субкультуры в ключевой ресурс развития общества» (Асмолов, 2014). Именно в этом пространстве формируются основы «идеологии индивидуального прогресса каждого ребенка, идеологии свободного выбора и поддержки разнообразия детства» (Асмолов, 2014).

Организация образовательного процесса, основанного на интеграции технологий дополненной реальности и Интернет вещей, отвечает идеям педагогики достоинства и самоворенения, поскольку позволяет подростку выступать активным субъектом деятельности, конструирующим собственный цифровой продукт и личностный опыт. В практическом

плане эти идеи реализуются через специально разработанный учебный модуль, направленный на формирование у подростков навыков совмещения виртуальной и физической среды.

Обучающиеся знакомятся с микроконтроллерной платформой Arduino и её современными модификациями, изучают работу с датчиками, кнопками, сервоприводами, LED- и RGB-светодиодами, а также средствами беспроводной связи. Практические задания включают моделирование схем, диагностику данных через монитор порта, а также реализацию двустороннего обмена данными между Unity и Arduino. Особое внимание уделяется управлению виртуальными объектами через реальные устройства (и наоборот), что позволяет освоить основы прототипирования интерактивных систем и Интернет вещей.

Обучение подростков разработке приложений с дополненной реальностью и использованием технологии Интернет вещей разделено на четыре этапа: мотивационно-ценностный, теоретический, операционно-деятельностный и рефлексивно-коррекционный. Их содержание раскрывается через систему учебных заданий, организованных по принципу поэтапного усложнения и ориентированных на развитие ключевых компетенций подростков в области проектирования приложений с дополненной реальностью и элементами Интернет вещей.

Мотивационно-ценностный этап направлен на формирование познавательного интереса, внутренней мотивации и осознания значимости дополненной реальности как инструмента личностного и профессионального развития. Задания этого этапа включают знакомство с примерами проектов, совмещающих данные технологии, моделирование простых схем и визуализацию цифровых объектов в физической среде с использованием цифровых средств Unity и TinkerCad. Выполнение заданий способствует первоначальному освоению понятий, формированию эмоциональной вовлеченности и развитию мотивационной установки на проектную деятельность.

Теоретический этап обеспечивает систематизацию базовых знаний, усвоение понятийного аппарата и освоение алгоритмической логики работы цифровых средств Unity и Arduino. Подростки осваивают принципы функционирования сенсоров, сервоприводов, каналов передачи данных, а также методы отладки и диагностики. Через выполнение заданий (работа с кнопками, модулями Bluetooth, мониторингом порта и пр.) формируются основы инженерного и критического мышления, необходимые для реализации прототипов.

Операционно-деятельностный этап является центральным в реализации обучения. Он включает разработку функциональных прототипов с использованием ESP32, Unity и Arduino, а также реализацию взаимодействия между физическими объектами и цифровой сценой. Учащиеся последовательно осваивают механизмы приёма и передачи данных, программируют реакции виртуальных объектов на внешние события, и формируют навыки проектирования.

Рефлексивно-коррекционный этап завершает образовательный цикл. Его цель – обеспечение осмысленного анализа выполненной деятельности, выявление допущенных ошибок и направлений для дальнейшего развития. Выполнение заданий, направленных на интерпретацию сенсорных данных и управление сценой (изменение освещенности сцены в зависимости от показаний фоторезистора), способствует развитию самооценки, целеполагания и способности к формулированию выводов. Итоговое задание – выполнение кейса с интеграцией физического устройства и цифровой сцены – предполагает самостоятельную реализацию проекта, оформление результатов и представление авторского замысла.

Подробная структура заданий обучения подростков разработке приложений с дополненной реальностью с использованием технологии Интернет вещей представлена в таблице 1.

№	Название задания	Цель задания	Форма реализации
1. Мотивационно-ценностный этап			
1.1	Создание устройств с технологией Интернет вещей с использованием Unity и Arduino	Понять принципы сопряжения дополненной реальности и микроконтроллеров, выявить области их практического применения	Изучение примеров интеграции, ответы на вопросы, описание найденного кейса применения дополненной реальности совместно с микроконтроллерами, обсуждение возможных направлений развития
1.2	Моделирование схем устройств с дополненной реальностью	Освоить основы конструирования электронных схем и принципов их функционирования в виртуальном симуляторе	Сборка схемы (Arduino, светодиод, резистор) в среде моделирования, программирование мигания светодиода, изменение параметров и фиксация результатов с помощью снимков экрана
1.3	Свечение LED- и RGB-светодиодов	Научиться управлять каналами широтно-импульсной модуляции и создавать световые эффекты, соотнося их с возможными сценариями использования с дополненной реальностью	Создание схемы с RGB-светодиодом в симуляторе, разработка программы для изменения цветов и эффекта «дыхания», проверка работы в симуляторе и формулирование краткой идеи интеграции с цифровой сценой
2. Теоретический этап			
2.1	Работа с сервоприводом	Понять принцип функционирования сервопривода и основы позиционного управления	Моделирование схемы в виртуальном симуляторе, написание базовой программы с изменением угла, проверка в симуляции и фиксация результатов; самостоятельная работа – реализация цикла движения и плавного «дыхания», фиксация результатов снимками экрана
2.2	Работа с кнопками и Bluetooth модулем	Освоить обработку дискретного ввода и основы передачи команд по беспроводному каналу связи	Сборка схемы с кнопкой и модулем беспроводной связи, написание программы с передачей команд, проверка соединения; самостоятельная работа – демонстрация передачи трех различных команд и корректности их приема
2.3	Монитор порта: диагностика данных	Освоить приемы отладки работы микроконтроллера через последовательный порт и анализировать данные от датчиков и устройств	Инициализация последовательного порта, форматированный вывод, считывание и фиксация данных в мониторинге среды программирования, интерпретация результатов; самостоятельная работа – моделирование схемы с корректным выводом и краткими выводами о работе устройства
3. Операционно-деятельностный этап			
3.1	Работа с модулем ESP32	Освоить базовую сетевую функциональность микроконтроллера и продемонстрировать ее интеграцию с приложением дополненной реальности	Прошивка ESP32 с подключением к беспроводной сети, вывод состояния и данных (на веб-страницу или через монитор порта), демонстрация доступа по IP-адресу, подготовка скриншотов/видео и краткого описания сценария

3.2	Управление в Unity через Arduino. Управление LED светодиодом	Освоить принцип последовательного обмена данными и реализовать управление физическим устройством из приложения с дополненной реальностью	Написание программы для микроконтроллера с приемом команд и управлением светодиодом, создание скрипта в Unity для отправки команд, демонстрация включения и выключения устройства с фиксацией результатов
3.3	Управление в Unity через Arduino. Управление объектом по кнопке	Освоить основы передачи данных от физических датчиков и кнопок в цифровую сцену	Сборка схемы с кнопкой, передача сигналов в Unity через последовательный порт, реализация реакции объекта (поворот, изменение масштаба, цвета), демонстрация работы с фиксацией результатов
4. Рефлексивно-коррекционный этап			
4.1	Управление Arduino через Unity. Управление сервоприводом	Освоить связку Unity и Arduino для позиционирования сервопривода и оценить стабильность управления	Собрать схему с сервоприводом, прошить прием целевого угла, создать интерфейс (ползунок или кнопки) для отправки данных по Serial в Unity, протестировать и предложить сценарий применения
4.2	Управление Arduino через Unity. Изменение освещенности на сцене	Понять, как данные датчика (фоторезистор) транслируются в визуальные параметры сцены, и проанализировать чувствительность	Собрать схему с фоторезистором, передавать значения в порт, считывать их в Unity и связывать с визуальным эффектом (яркость, цвет, размер объекта); выполнить тест и кратко описать кейс использования дополненной реальности
	Кейс по модулю	Выполнить авторский проект, где событие реального мира изменяет сцену приложения с дополненной реальностью; провести рефлексию и наметить улучшения	Спланировать идею, собрать прототип (в симуляторе или физически), наладить обмен данными (Serial, BLE, Wi-Fi), реализовать реакцию в Unity, оформить результаты (фото, видео, скриншоты) и описать пути развития

В качестве иллюстрации системы заданий рассмотрим итоговый кейс по модулю, выполняемый обучающимся в формате самостоятельного проекта. Суть задания заключается в разработке цифрового продукта, в котором взаимодействие с физическими устройствами и компонентами вызывает изменения в AR-сцене, визуализированной средствами Unity. Результатом становится авторский прототип – интерактивная инсталляция, «гаджет будущего» или элемент мини-игры, демонстрирующий интеграцию физических и виртуальных компонентов среды.

Обучающий блок предполагает разработку авторского проекта с использованием Unity и Arduino (описание концепции взаимодействия физической и виртуальной частей), планирования реализации (подбор датчиков, кнопок, сервоприводов, модулей связи), сборки физической схемы в реальной жизни или моделирование в платформе TinkerCad, настройки передачи данных (Serial, Bluetooth, Wi-Fi), создания AR-сцены в Unity с реакцией виртуальных объектов на физические события, подготовки проектной документации (схемы, скриншоты, описание принципа работы и областей применения).

Структура кейса представлена в двухуровневом формате:

– на репродуктивном уровне обучающийся реализует базовую идею, собирает прототип и обеспечивает передачу сигнала от устройства в цифровую сцену;

МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

– на продуктивном уровне обучающийся самостоятельно проектирует взаимодействие, оформляет результаты и формулирует направления для дальнейшего развития проекта.

Предметные результаты освоения учебного содержания операционализованы в соответствии с когнитивной таксономией Б. Блума в редакции Л. Андерсона: «запоминать», «понимать», «применять», «анализировать», «оценивать», «создавать». Они представлены в таблице 2, отражающей уровневую динамику освоения учебного материала в контексте разработки приложений с дополненной реальностью с технологией Интернет вещей.

Таблица 2.

Планируемые предметные результаты обучения

Когнитивный уровень	Планируемые предметные результаты
Запоминать	<ol style="list-style-type: none"> 1. Определять понятия: дополненная реальность, Arduino, сенсоры, последовательный порт, ESP-модуль. 2. Воспроизводить базовые команды Arduino. 3. Узнавать назначение компонентов схемы (светодиод, резистор, кнопка, сервопривод, фоторезистор, модуль Bluetooth, ESP32).
Понимать	<ol style="list-style-type: none"> 1. Объяснять принципы взаимодействия дополненной реальности и Arduino. 2. Интерпретировать работу простых схем (мигание светодиода, смена цвета RGB, движение сервопривода). 3. Сравнить каналы передачи данных (Serial, Bluetooth, Wi-Fi). 4. Описывать логику связи «событие в реальном мире – реакция в виртуальной сцене».
Применять	<ol style="list-style-type: none"> 1. Собирать схемы в TinkerCad Circuits или физически с Arduino и базовыми компонентами. 2. Использовать Arduino IDE для написания и загрузки скетчей. 3. Настраивать передачу данных между Arduino и Unity. 4. Реализовывать взаимодействие пользователя с объектами дополненной реальности.
Анализировать	<ol style="list-style-type: none"> 1. Сравнить схемы и способы связи (Serial, Bluetooth, Wi-Fi) по возможностям и ограничениям. 2. Определять взаимосвязь между физическим датчиком и цифровым параметром в Unity. 3. Делить процесс разработки на этапы: сборка схемы – написание скетча – интеграция в Unity. 4. Анализировать результаты симуляции и тестирования, выявлять ошибки подключения и кода.
Оценивать	<ol style="list-style-type: none"> 1. Проверять корректность работы собранных схем и скетчей. 2. Оценивать надежность связи Arduino – Unity (устойчивость, скорость, отклик). 3. Критически оценивать удобство пользовательского взаимодействия. 4. Обосновывать выбор аппаратного компонента или способа связи.
Создавать	<ol style="list-style-type: none"> 1. Проектировать и реализовывать проект, демонстрирующий взаимодействие физического устройства и цифровой сцены. 2. Совмещать в проекте несколько видов данных (датчики, кнопки, командные сигналы). 3. Создавать пользовательские сценарии и логику взаимодействия с приложением. 4. Презентовать и рефлексивно оценивать разработанный проект.

Результативность обучения подростков разработке приложений с дополненной реальностью и использованием технологии Интернет вещей определяется согласованностью целей, содержания, форм организации деятельности и процедур оценивания. Апробация и проверка результативности представленной модели обучения подростков разработке приложений с дополненной реальностью с использованием технологии интернет вещей проводилась на базе государственного бюджетного учреждения дополнительного образования «Центр развития творчества и научно-технических инициатив детей и молодежи» Калининского района г. Санкт-Петербурга (структурное подразделение – детский технопарк «Кванториум»).

Процедура исследования включала констатирующий, формирующий и итоговый этапы. На констатирующем этапе была проведена диагностика исходного уровня сформированности способности подростков к разработке приложений с дополненной реальностью и использованием технологии Интернет вещей. Оценка осуществлялась с применением разработанного диагностического комплекса, включающего показатели по четырём критериям: мотивационно-ценностному, теоретическому, операционно-деятельностному и рефлексивно-коррекционному. Для каждого критерия была установлена трехуровневая шкала (низкий, базовый, высокий), что обеспечило сопоставимость результатов контрольной и экспериментальной групп.

На формирующем этапе осуществлялась апробация учебного модуля, включающего практико-ориентированные задания по работе с микроконтроллерами, цифровыми датчиками и инструментами разработки приложений с дополненной реальностью. Обучение в экспериментальной группе отличалось включением практико-ориентированных заданий и кейсов, разработанных совместно с представителями компаний НПО «Экосфера» и СПб ГБУ «ЦСЗПОМ “ВЕКТОР”», регулярной работой с технической документацией, а также представлением результатов в формате публичной защиты с демонстрацией разработанного прототипа. Обучение в контрольной группе строилось на основе традиционного методического обеспечения, включающего фронтальные объяснения, выполнение типовых заданий и отсутствие внешней экспертизы результатов.

На итоговом этапе проводилась повторная диагностика по тем же критериям и показателям. Сравнение данных контрольной и экспериментальной групп осуществлялось с использованием критерия Фишера (φ^*), что позволило выявить статистически значимые различия на уровне $p < 0,05$. Сводные данные, отражающие динамику изменений в экспериментальной группе между констатирующим и итоговым этапами опытно-экспериментальной работы, представлены в Таблице 3. Анализ значений критерия Фишера (φ^*) на уровне значимости $p < 0,05$ показывает превышение критического уровня по каждому из диагностируемых показателей, что свидетельствует о наличии устойчивых положительных сдвигов у участников экспериментальной группы.

Таблица 3.

Сравнение уровней сформированности критериев и показателей эффективности реализации в экспериментальной группе на констатирующем и итоговом этапах опытно-экспериментальной работы

Показатель	Констатирующий				Итоговый				φ^*
	Н	Б	В	СП, %	Н	Б	В	СП, %	
1. Мотивационно-ценностный критерий									
1.1. Мотивация к разработке приложений с дополненной реальностью	43	31	16	52,22	12	48	30	86,67	5,22
1.2. Отношение к применению дополненной реальности	51	26	13	43,33	8	31	55	91,11	7,37

МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

2. Теоретический критерий									
2.1. Понимание принципов работы дополненной реальности	49	25	16	45,56	13	32	45	85,56	5,90
2.2. Понимание роли информационно-коммуникационных технологий в разработке приложений с дополненной реальностью	40	34	16	55,56	11	33	46	87,78	5,00
3. Операционно-деятельностный критерий									
3.1. Умение проектировать пользовательское взаимодействие в приложениях с дополненной реальностью	45	25	20	50	16	30	44	82,22	4,70
3.2. Умение разрабатывать архитектуру приложения с дополненной реальностью и реализовывать ее	47	26	17	47,78	13	28	49	85,56	5,61
4. Рефлексивно-коррекционный критерий									
4.1. Умение анализировать функциональность и пользовательский опыт в приложениях с дополненной реальностью	41	24	25	54,44	9	32	49	90,00	5,62
4.2. Готовность к внесению обоснованных изменений в приложение с дополненной реальностью на основе анализа и обратной связи	48	26	16	46,67	12	54	24	86,67	5,97

Реализация учебного модуля в образовательной практике детского технопарка «Кванториум» подтвердила его эффективность: обучающиеся осваивали основы работы с микроконтроллерами и цифровыми платформами, создавали собственные проекты, объединяющие виртуальные и физические объекты (Ануфриенко, 2024). Разработанная система заданий, выстроенная по принципу «от идеи до прототипа», придавая учебному процессу практическую направленность и смысловую целостность, а также способствует раннему профессиональному самоопределению подростков в сфере информационных технологий.

Заключение

Проведенное исследование подтвердило педагогическую целесообразность и технологическую реализуемость обучения подростков разработке приложений с дополненной реальностью с использованием технологии Интернет вещей. Разработанная и апробированная модель обучения, включающая мотивационно-ценностный, теоретический, операционно-деятельностный и рефлексивно-коррекционный этапы, продемонстрировала устойчивую положительную динамику формирования показателей способности подростков к разработке приложений с дополненной реальностью.

Реализация модуля в образовательной практике детского технопарка «Кванториум» способствовала формированию у обучающихся цифровой компетентности и развитию навыков проектной деятельности. Практико-ориентированные задания, построенные по принципу «от идеи до прототипа», способствовали развитию самостоятельности, рефлексии и готовности к дальнейшему профессиональному развитию в сфере информационных технологий и креативных индустрий. Перспективы дальнейших исследований связаны с развитием методических подходов к проектированию новых сценариев применения дополненной реальности и технологии Интернет вещей в образовательной практике.

Список литературы

Ануфриенко Е.К., Бекузарова Н.В. Обзор существующих массовых открытых онлайн-курсов по технологии дополненной реальности // Преподаватель XXI век. 2022. №1(1). С. 159–167. DOI: 10.31862/2073-9613-2022-1-159-167

- Ануфриенко Е.К., Использование кейс-метода в обучении подростков разработке приложений с дополненной реальностью // Наука и школа. 2024. №4. С. 212–221. DOI 10.31862/1819-463X-2024-4-212-221.
- Асмолов А.Г. Дополнительное персональное образование в эпоху перемен: сотрудничество, сотворчество, самотворение // Образовательная политика. 2014. № 2(64). С. 2–6.
- Асмолов А.Г. Педагогика достоинства: идеология дошкольного и дополнительного образования // Образовательная политика. 2014. № 3(65). С. 2–4.
- Атлас новых профессий. Каталог профессий. URL: <https://atlas100.ru/catalog/> (дата обращения: 13.11.2025).
- Вахрушева А.А. Опыт и перспективы применения Интернет вещей в навигации // Интернетэкспо Гео-Сибирь. 2017. № 2. С. 25–30.
- Гальчук А.А., Сергеев А.Н. Использование технологий Интернет вещей на уроках информатики в школе // Научный результат. Педагогика и психология образования. 2017. № 4(14). С. 3–10. DOI: 10.18413/2313-8971-2017-3-4-3-10
- Заславская О.Ю., Кириллов А.И. Новые возможности информатизации образования – «Интернет вещей» // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2017. Т.14. № 2. 140–147. DOI: 10.22363/2312-8631-2017-14-2-140-147.
- Зубков В.Г., Колтунов И.И., Акимов А.В. Лабораторные работы для дистанционного обучения студентов // Автомобиле- и тракторостроение в России: приоритеты развития и подготовка кадров: материалы 77-й Международной научно-технической конференции ААИ. г. Москва, 2012. С. 47–59.
- Китайгородский М.Д. Интернет вещей в подготовке учителей технологии // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2019. № 12. С. 13–24. DOI: 10.24411/2304-120X-2019-11071.
- Куприяновский В.П., Намиот Д.Е., Дрожжинов В.И., Куприяновская Ю.В., Иванов М.О. Интернет Вещей на промышленных предприятиях // International Journal of Open Information Technologies. 2016. № 12. С. 69–77.
- Правительство Российской Федерации. Распоряжение от 31 марта 2022 г. № 678-р «О Концепции развития дополнительного образования детей до 2030 года». URL: https://media.caspian.agency/school_2739/documents/documents/O%20Концепции%20развития%20дополнительного%20образования%20детей%20до%202030%20года.pdf (дата обращения: 13.11.2025).
- Правительство Российской Федерации. Дорожная карта сквозной цифровой технологии «Виртуальная и дополненная реальность». URL: <https://digital.gov.ru/uploaded/files/07102019vrrar.pdf>

Информация об авторах

Смолянинова Ольга Георгиевна; доктор педагогических наук; академик РАО; профессор; Сибирский федеральный университет (Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, проспект Свободный, 79); E-mail: osmolyaninova@sfu-kras.ru; ORCID: 0000-0002-5597-6348;

Ануфриенко Евгений Константинович; аспирант; Сибирский федеральный университет (Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, проспект Свободный, 79); E-mail: angimn@yandex.ru; ORCID: 0000-0001-7447-9198

**TEACHING TEENAGERS TO DEVELOP AUGMENTED REALITY
APPLICATIONS USING INTERNET OF THINGS TECHNOLOGY**

Smolyaninova O. G. | Siberian Federal University,
Dr. Sci. (Pedagogy), Academician of the
Russian Academy of Sciences, Professor
Anufrienko E. K. | Siberian Federal University,
post-graduate student

Abstract. The article addresses the problem of insufficient motivation and limited opportunities for teenagers to master modern digital technologies within the system of supplementary education. To enhance learners' interest and develop their project-based skills, it is proposed to combine augmented reality and Internet of Things technologies in order to ensure the integration of virtual and physical environments. The use of these technologies enables meaningful interaction between digital and real-world objects, creating conditions for the development of digital competence as well as for early professional orientation of teenagers in the field of information technology. The purpose of the study is to provide a theoretical justification and experimental verification of an approach to teaching adolescents to develop augmented reality applications using Internet of Things technology. The structure of the developed educational module is presented, along with a system of learning tasks designed to ensure a gradual increase in the complexity of activities. The methodological basis of the study includes a systemic and comparative analysis of scientific and pedagogical sources, as well as an experimental study conducted at the children's technopark «Quantorium» (St. Petersburg) in 2022–2024 with the participation of 165 learners. The research procedure consisted of three stages: diagnostic, formative, and final; assessment was carried out according to motivational–value, theoretical, operational–activity, and reflective–corrective criteria. The results of the final assessment demonstrated statistically significant positive dynamics in the experimental group across all criteria, confirming the effectiveness of the developed module. It was noted that the task system based on the «from idea to prototype» principle contributes to the formation of skills in working with digital platforms and Internet of Things technologies, while also supporting learners' professional self-determination in the field of information technology. Prospects for further research are associated with designing next-generation educational modules and developing «smart» learning environments based on the integration of cross-cutting digital technologies.

Keywords: augmented reality, Internet of Things, digitalization of education, teenagers, learning technologies

For citation: Smolyaninova O. G., Anufrienko E. K. (2026). Teaching teenagers to develop augmented reality applications using Internet of Things technology. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2(42), 134–145. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-134-145

Copyright: © O. G. Smolyaninova, E. K. Anufrienko (2025). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Anufrienko, E. K., Bekuzarova, N. V. (2022). An Overview of Existing Large-scale Open Online Courses on Augmented Reality Technology. *Prepodavatel XXI vek*, 1(1), 159-167. DOI: 10.31862/2073-9613-2022-1-159-167 (In Russ., abstract in Eng.)
- Anufrienko, E. K. (2024). The use of case-study method in teaching teenagers app with augmented reality development. *Nauka i shkola*, 4, 212-221. DOI: 10.31862/1819-463X-2024-4-212-221
- Asmolov, A. G. (2014). Dopolnitel'noe personal'noe obrazovanie v epokhu peremen: sotrudnichestvo, sotvorchestvo, samotvorenienie. *Obrazovatel'naya politika*, 2(64), 2-6.
- Asmolov, A. G. (2014). Pedagogika dostoinstva: ideologiya doshkol'nogo i dopolnitel'nogo obrazovaniya. *Obrazovatel'naya politika*, 3(65), 2-4.
- Atlas novykh professiy. Katalog professiy. Retrieved from <https://atlas100.ru/catalog/> (last viewed 13.11.2025).
- Gal'chuk, A. A., Sergeev, A. N. (2017). The use of Internet technologies of Things at the lessons of informatics at school. *Research result. Pedagogic and psychology of education*, 4(14), 3-10. DOI: 10.18413/2313-8971-2017-3-4-3-10 (In Russ., abstract in Eng.).
- Kitaygorodskiy, M. D. (2019). Internet veshchey v podgotovke uchiteley tekhnologii. *Nauchno-metodicheskiy elektronnyy zhurnal «Kontsept»*, 12, 13-24. DOI: 10.24411/2304-120X-2019-11071.
- Kupriyanovskiy, V. P., Namiot, D. E., Drozhzhinov, V. I., Kupriyanovskaya, Yu. V., Ivanov, M. O. (2016). Internet Veshchey na promyshlennykh predpriyatiyakh. *International Journal of Open Information Technologies*, 12, 69-77.
- Pravitel'stvo Rossiyskoy Federatsii. Rasporyazhenie ot 31 marta 2022 g. № 678-r «O Kontseptsii razvitiya dopolnitel'nogo obrazovaniya detey do 2030 goda». Retrieved from https://media.caspian.agency/school_2739/documents/documents/O%20Kontseptsii%20razvitiya%20dopolnitel'nogo%20obrazovaniya%20detey%20do%202030%20goda.pdf
- Pravitel'stvo Rossiyskoy Federatsii. Dorozhnaya karta skvoznoy tsifrovoy tekhnologii «Virtual'naya i dopolnennaya real'nost'». Retrieved from <https://digital.gov.ru/uploaded/files/07102019vrrar.pdf> (last viewed 13.11.2025).
- Vakhrusheva, A. A. (2017). Opyt i perspektivy primeneniya Internet veshchey v navigatsii. *Interekspo Geo-Sibir'*, 2, 25-30.
- Zaslavskaya, O. Yu., Kirillov, A. I. (2017). New features of education informatization – “Internet of things”. *RUDN Journal of Informatization Education*, 14 (2), 140-147. DOI: 10.22363/2312-8631-2017-14-2-140-147 (In Russ., abstract in Eng.).
- Zubkov, V. G., Koltunov, I. I., Akimov, A. V. (2012). Laboratornye raboty dlya distantsionnogo obucheniya studentov. Avtomobile- i traktorostroenie v Rossii: priorityety razvitiya i podgotovka kadrov: *materialy 77-y Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii AAI* (pp. 47-59). Moscow. (In Russ.).

Information about the authors

Olga G. Smolyaninova; Doctor of Pedagogical Sciences; Academician of the Russian Academy of Sciences, Professor; Siberian Federal University (79 Svobodny Avenue, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation); E-mail: osmolyaninova@sfu-kras.ru; ORCID: 0000-0002-5597-6348;

Evgeniy K. Anufrienko; post-graduate student; Siberian Federal University (79 Svobodny Avenue, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation); E-mail: angimn@yandex.ru; ORCID: 0000-0001-7447-9198

Статья поступила в редакцию	12.11.2025
Принята к публикации	27.11.2025
Статья опубликована	19.06.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-146-159

УДК
378.147:004.9

**ВНЕДРЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ В
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС С ЦЕЛЬЮ ФОРМИРОВАНИЯ
ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЦЕННОСТНЫХ ОРИЕНТАЦИЙ
КУРСАНТОВ**

Тиняков Сергей Владимирович
аспирант
Щербатых Людмила Николаевна
к.п.н., профессор

Елецкий государственный университет
им. И.А. Бунина
Елецкий государственный университет
им. И.А. Бунина

Аннотация. В статье рассматривается внедрение технологий виртуальной реальности с целью формирования профессиональных ценностных ориентаций курсантов ведомственных учебных заведений. В условиях возрастающей угрозы безопасности и суверенитета государства подготовка квалифицированных военных кадров является приоритетной задачей современного военного образования. Личностной основой деятельности военного специалиста являются профессиональные ценности. Авторы перечисляют ценностные ориентации, необходимые для успешной деятельности военного специалиста. Их формирование в ходе образовательного процесса должно происходить с использованием всех перспективных образовательных технологий, одной из которых являются VR-технологии. Авторы статьи провели анализ научных исследований по проблематике внедрения VR-технологий в образовательный процесс ведомственного учебного заведения. В статье авторами делается акцент на основных направлениях научного исследования данной проблематики. Рассмотрены взгляды учёных-педагогов на значение применения технологий виртуальной реальности в образовательном процессе и проблемы их внедрения. В исследовании были сформулированы основные препятствия внедрения VR-технологий в учебно-воспитательный процесс ведомственных учебных заведений. Основной проблемой внедрения VR-технологий в образовательный процесс ведомственного учебного заведения является консервативный характер образовательной среды и слабая цифровая грамотность педагогов. В современной педагогической науке отсутствуют исследования, рассматривающие возможности применения технологий виртуальной реальности с целью формирования профессиональных ценностных ориентаций обучаемых. Авторы выработали алгоритм внедрения VR-технологий в образовательную среду ведомственного учебного заведения с целью формирования и развития у обучаемых необходимых профессиональных ценностных ориентаций курсантов. При качественном и последовательном соблюдении всех этапов представленного алгоритма прогнозируется успешное внедрение технологий виртуальной реальности в образовательную среду ведомственного учебного заведения с целью формирования профессиональных ценностных ориентаций обучаемых.

Ключевые слова: ведомственные учебные заведения, курсанты, военно-педагогический процесс, профессиональные ценностные ориентации, технологии виртуальной реальности, VR-технологии

Для цитирования: Тиняков С.В., Щербатых Л.Н. Внедрение технологий виртуальной реальности в образовательный процесс с целью формирования профессиональных ценностных ориентаций курсантов // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 4 (42). С. 146–159. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-146-159

Права: © С.В. Тиняков, Л.Н. Щербатых (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

В условиях нарастания военных угроз суверенитету и безопасности Российской Федерации особую значимость приобретает вопрос повышения качества военных специалистов. Основным требованием, определяющим качество и полноту подготовки военного специалиста, является соответствие учебно-воспитательного процесса современным тенденциям образования. Одной из основных тенденций образования в современном мире является цифровизация образовательного процесса и интеграция цифровых технологий во все уровни образования.

Одной из наиболее перспективных цифровых технологий, позволяющей значительно ускорить подготовку специалиста, повысить наглядность процесса обучения является технологии дополненной реальности. Использование технологий дополненной реальности позволяет улучшить усвоение учебных тем и интерес к изучению материала.

Применение технологий виртуальной реальности для достижения различных целей обучения и воспитания является перспективным направлением педагогической науки.

Обзор литературы

Перспективность использования технологий дополненной реальности в образовательном процессе на всех уровнях образования отмечают большинство педагогов-исследователей (Кравченко, 2014), (Родионов, 2021), (Григорьев, 2023) и др.

Исследования в области применения технологий виртуальной реальности ведутся в нескольких направлениях. Направления исследования применения технологий виртуальной реальности наглядно представлены на рис. 1.



Рис. 1. Направления исследования применения VR-технологий в образовательном процессе

Ю.А. Кравченко, А.А. Лежебоков и С.В. Пащенко, изучая особенности использования технологий дополненной реальности для поддержки образовательных процессов, отмечают высокое значение интеграционного процесса применения VR-технологий для совершенствования и развития образовательной среды учебных заведений (Кравченко 2014, 54).

О.В. Родионов акцентирует внимание на том, что интеграция цифровых технологий в образовательный процесс позволяет повысить качество усвоения учебного материала за счёт повышения практической ориентированности, наглядности и интерактивности процесса обучения (Родионов, 2021, 122).

Де Мораес Россетто (Де Мораес Россетто, 2023), Ф.М. Динис (Динис, 2021), Т. Давуд (Давуд, 2025) акцентируют внимание на возможности создания смешанной образовательной среды с активным использованием технологий виртуальной реальности для персонализации и интенсификации обучения.

М.А. Дронова отмечает, что технологии виртуальной реальности способствуют созданию увлекательной инновационной образовательной среды, способствующей психологическому и личностному развитию обучающихся (Дронова, 2025).

Г.И. Шевченко, А.А. Рыбакова, Д.А. Кочкин утверждают, что технологии виртуальной реальности значительно повышают умственные способности обучающихся (Шевченко, 2025, 401).

О.В. Ламонина и О.Б. Смирнов отмечают, что использование технологий виртуальной реальности способствует овладению обучающимися информационно-коммуникационными и цифровыми профессиональными компетенциями (Ламонина, 2020).

В.А. Закарютина отмечает, что внедрение VR-технологий в образовательный процесс позволяет применять инновационные подходы к обучению и воспитанию (Закарютина, 2020, 8).

Современные учёные-педагоги выделяют ряд проблем интеграции технологий VR-реальности в образовательный процесс учебного заведения.

И.В. Григорьева и А.А. Греков, изучая труды современных ученых по вопросу интеграции технологий виртуальной реальности в современный учебно-воспитательный процесс, отмечает высокую стоимость данных технологий, что значительно замедляет их внедрения в образовательную среду учебных заведений (Григорьева, 2023, 22).

И.С. Евдокимов, А.С. Михалев, Н.А. Тимофеев, Ю.А. Батулин видят проблемой внедрения технологий в отсутствие квалифицированных кадров на рынке цифрового образования (Евдокимов, 2017, 133).

Я.С. Василенко приоритетным направлением решения проблемы интеграции цифровых технологий считает повышение цифровой компетенции педагогов и подготовку их к применению VR-технологий в образовательном процессе (Василенко, 2025).

Д.А. Фокина, помимо недостаточной цифровой компетентности преподавательского состава, выделяет проблему обеспеченности аппаратными средствами, поддерживающими VR-технологии (Фокина, 2022, 153).

В.А. Федоровский основной проблемой использования технологий VR-реальности видит сложности в обеспечении информационной безопасности (Федоровский, 2024, 267).

Н.Ю. Пак выделяет несколько групп проблемных факторов в использовании технологий виртуальной реальности в образовательном процессе: физиологические, психологические и когнитивные, педагогические, технические и организационные, а также юридические и этические (Пак, 2025).

А.А. Паскова (Паскова, 2022), А.Э. Памирский (Памирский, 2023) М.В. Бугаевская (Бугаевская, 2020), Е.А. Певцова (Певцова, 2018) основной проблемой видят отсутствие совершенной нормативно-правовой базы внедрения технологий VR-реальности в образовательную среду учебных заведений.

Обсуждение

Проблема цифровизации процесса обучения ведомственных учебных заведений и применения технологий дополненной реальности недостаточно освещена в современных научных исследованиях. Это связано с тем фактом, что ведомственные учебные заведения сильно отстают в данном процессе от учебных заведений других профилей обучения (Бажутин 2024, 70).

Сложность процесса применения технологий дополненной реальности обуславливается совокупностью взаимосвязанных факторов:

- спецификой организации учебно-воспитательного процесса ведомственного учебного заведения;
- особенностью устройства образовательной среды;
- консервативностью образовательного процесса;
- незнанием военными педагогами особенностей применения технологий VR-реальности;
- отсутствием единой методики интеграции VR-технологий в образовательный процесс.

Комплексная интеграция технологий виртуальной реальности позволит увеличить качественное и глубокое усвоение материала военными специалистами, повысить вовлеченность и мотивацию обучаемых и расширить возможности персонализации обучения (Пятибрат, 2023).

Использование технологий виртуальной реальности в учебном процессе ведомственных учебных заведений позволяет имитировать стрессовые ситуации без риска для жизни и здоровья обучаемых (Булгаков, 2020).

Основной проблемой интеграции технологий виртуальной реальности в образовательную среду ведомственных учебных заведений является сложность сочетания исторически сложившейся традиционной системы обучения военного специалиста и перспективных цифровых технологий (Спицын, 2021, 104).

Современные исследователи активно занимаются изучением возможностей и перспектив внедрения технологий дополненной реальности в образовательную среду ведомственных учебных заведений. В педагогической науке пока не выработана и не апробирована единая модель интеграции цифровых технологий в образовательную среду ведомственных учебных заведений.

Основой личности военного специалиста является набор профессиональных ценностных ориентаций. Под профессиональными ценностными ориентациями большинство учёных, таких как Л.А. Юсупова-Вельгорская (Юсупова-Вельгорская, 2023), М.И. Касаткина (Касаткина, 2023, 201), Т.А. Жалатина (Жалагина, 2021, 66), М.С. Чванова (Чванова, 2024) понимают базисный компонент структуры личности, определяющий отношение к сфере профессиональной деятельности и способствующих развитию в данной сфере.

С.В. Тепляков делит профессиональные ценностные ориентации военнослужащих на несколько групп: отношение к себе, к своей профессии и стране. Основными профессиональными ценностными ориентациями военнослужащих являются патриотизм, историческая память, отвага, мужество, решительность, стремление к профессиональному самосовершенствованию, гордость за принадлежность к Вооруженным Силам Российской Федерации, исполнительность, благородство и скромность (Тепляков, 2023). Устойчивые сформированные профессиональные ценностные ориентации обуславливают дальнейшую успешность деятельности военного специалиста.

Качественное формирование профессиональных ценностных ориентаций военного специалиста невозможно без применения всех современных средств, методов, форм и технологий обучения, одной из которой является технология дополненной реальности.

Анализ научной литературы показал отсутствие исследований, изучающих возможность использования технологий виртуальной реальности с целью формирования профессиональных ценностных ориентаций курсантов ведомственных учебных заведений.

Для понимания специфики организации и возможности интеграции цифровых технологий в учебно-воспитательный процесс ведомственного учебного заведения был использован средовой метод. Образовательная среда ведомственного учебного заведения была разделена на структурные элементы и рассмотрена возможность внедрения в них VR-технологий. Изучение компонентов образовательной среды позволяет эффективнее рассмотреть структуру учебно-воспитательного процесса и выработать эффективную модель интеграции (Швачко, 2017).

Для рассмотрения процесса интеграции VR-технологий в процесс обучения и воспитания курсантов ведомственного учебного заведения был использован метод педагогического моделирования. Данный метод заключается в создании модели процесса внедрения цифровых технологий в образовательную среду ведомственного учебного заведения с использованием определенного алгоритма работы. Использование педагогического моделирования в исследовании позволяет лучше изучить существенные особенности и структуру педагогического явления (Писаренко, 2024).

Результаты

Использование VR-технологий с целью формирования профессиональных ценностных ориентаций происходит в двух формах:

- прямое использование VR-технологий с целью формирования конкретных профессиональных ценностных ориентаций;
- «попутное» формирование профессиональных ценностных ориентаций при использовании технологий виртуальной реальности для формирования специальных профессиональных навыков и качеств.

Анализ образовательного процесса ведомственных учебных заведений показал, что в первой форме VR-технологии не применяются ввиду отсутствия механизма использования.

Примером «косвенного» применения VR-технологий с целью формирования профессиональных ценностных ориентаций может служить использование студентами военного медицинского учебного заведения тренажера по проведению операций. В ходе этого процесса помимо профессиональных компетенций, необходимых будущему офицеру медицинской службы, формируются решительность, стремление к профессиональному совершенствованию и интерес к профессии.

Для эффективного использования технологий виртуальной реальности в учебно-воспитательном процессе ведомственного учебного заведения необходимо создать модель их внедрения.

Модель внедрения технологий VR-реальности с целью формирования необходимых курсантам профессиональных ценностных ориентаций должна включать несколько взаимосвязанных этапов:

1. Этап целеполагания (формулирование целей и задач использования технологий цифровой реальности с целью формирования профессиональных ценностных ориентаций);
2. Анализ образовательного опыта внедрения технологий VR-реальности в учебно-воспитательный процесс;
3. Этап оценки имеющихся технологических и образовательных возможностей образовательной среды и рисков внедрения VR-технологий в образовательный процесс;
4. Поиск форм и методов использования VR-технологий с целью формирования профессиональных ценностных ориентаций;
5. Использование VR-технологий при формировании и развитии профессиональных ценностных ориентаций;
6. Предварительная оценка процесса использования VR-технологий для формирования профессиональных ценностных ориентаций;
7. Внесение необходимых корректировок в процесс внедрения;

8. Окончательная оценка эффективности процесса внедрения технологий виртуальной реальности.

Наглядно построение процесса внедрения VR-технологий представлены на рис. 2.



Рис. 2. Схема внедрения VR-технологий в образовательный процесс ведомственного учебного заведения

На этапе целеполагания необходимо определить какие профессиональные ценностные ориентации возможно сформировать или улучшить воспитательный процесс формирования с помощью использования VR-технологий.

Основными целями внедрения в образовательный процесс ведомственного учебного заведения с целью формирования профессиональных ценностных ориентаций могут являться:

1. Совершенствование и разнообразие воспитательного процесса формирования и развития профессиональных ценностных ориентаций;
2. Создание и повышение интерактивности аксиологического компонента воспитания;
3. Повышение качества формирования отдельных ценностных ориентаций путём их визуализации;
4. Совмещение традиционных и инновационных форм воспитания и обучения курсантов для более качественного формирования базовых профессиональных ценностных ориентаций;
5. Повышение интереса обучаемых к процессу формирования профессиональных ценностных ориентаций.

Перед построением образовательной модели внедрения технологий виртуальной реальности в образовательный процесс ведомственного учебного заведения необходимо произвести качественный анализ имеющегося образовательного опыта, в том числе опыта зарубежных стран.

МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Первоначально для внедрения VR-технологий педагог-воспитатель должен произвести комплексный анализ имеющихся технических и образовательных возможностей.

Под техническими возможностями понимается имеющиеся в распоряжении образовательного учреждения средства создания виртуальной реальности и их возможности применения в целях формирования и развития профессиональных ценностных ориентаций.

Образовательные возможности подразумевают под собой опыт и знания педагогов по применению VR-технологий и особенности построения образовательного процесса.

При проведении анализа целесообразно применить средовой подход. Данный подход заключается в анализе всех компонентов образовательной среды учебного заведения (архитектурно-эстетического, содержательного, формально-методического, коммуникативного, организационного и технического).

Анализ имеющихся форм и методов применения VR-технологий с целью формирования профессиональных ценностных ориентаций необходимо начать с косвенных форм применения. Как правило, технологии виртуальной реальности применяются при освоении курсантами таких дисциплин, как «Огневая подготовка», «Вождение боевых машин», «Автомобильная подготовка». Современный опыт ведения боевых действий вынудил ускоренно внедрять дисциплину «Применение беспилотных летательных аппаратов» и активно использовать при изучении данной дисциплины технологии виртуальной реальности.

На базе данных дисциплин возможно построение прямых форм использования VR-технологий для формирования профессиональных ценностных ориентаций, необходимых для успешной деятельности в качестве военного специалиста.

Примером таких форм могут служить:

– виртуальные экскурсии по музею учебного заведения, местам боевой славы с целью формирования патриотизма, исторической памяти, гордости за принадлежность к Вооруженным Силам РФ.

– создание виртуальных моделей значимых для ведомственного учебного заведения и истории страны событий и возможность их наблюдения в режиме виртуальной реальности;

– создание интерактивных музеев знаменитых выпускников ведомственного учебного заведения, полководцев и государственных деятелей, и проведение встреч с использованием VR-технологий с целью формирования патриотизма, гордости за принадлежность к Вооруженным Силам Российской Федерации;

– создание виртуальных фильмов про знаменитых военных деятелей с использованием VR-реальности и обеспечение эффекта наблюдения и погружения с целью формирования исторической памяти;

– создание тематических ситуационных заданий для оценки качества сформированности у курсантов необходимых профессиональных ценностных ориентаций.

Важным этапом является предварительная проверка качества процесса внедрения и его влияния на процесс формирования профессиональных ценностных ориентаций. Оценку целесообразно производить с использованием проверенных средств оценки сформированности необходимых профессиональных ценностных ориентаций. Это могут быть различные тестовые батареи, основанные на методике Рокича «Ценностные ориентации».

Примерный алгоритм оценки эффективности внедрения VR-технологий в образовательный процесс ведомственного учебного заведения представлен на рис. 3.

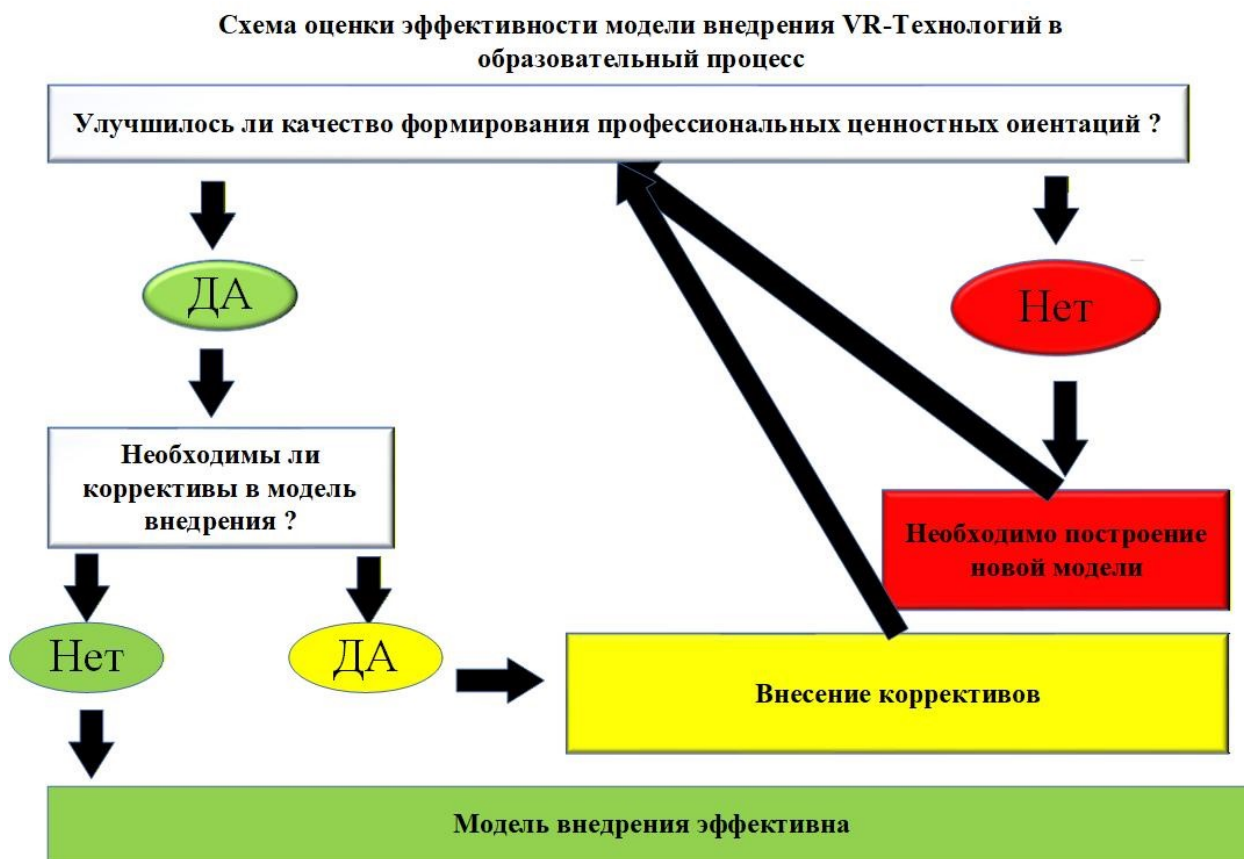


Рис. 3. Схема оценки эффективности модели внедрения VR-технологий в образовательный процесс

Заключение

При внедрении технологий виртуальной реальности в образовательный процесс ведомственного учебного заведения необходимо качественное и последовательное соблюдение всех этапов внедрения.

Для эффективного внедрения технологий виртуальной реальности в образовательную среду ведомственных учебных заведений с целью качественного формирования профессиональных ценностных ориентаций обучающихся необходимо:

1. Дальнейшее научное осмысление и изучение путей, способов и возможностей использования VR-технологий с целью формирования и развития профессиональных ценностных ориентаций обучающихся;
2. Поиск способов взаимодействия и дополнения традиционных и инновационных образовательных технологий в учебно-воспитательном процессе;
3. Дальнейшее повышение цифровой компетентности педагогов и обучающихся ведомственных учебных заведений с целью повышения эффективности использования технологического и педагогического потенциала технологий виртуальной реальности;
4. Продолжение изучения рисков и проблем применения технологий виртуальной реальности и выработка эффективных способов их минимизации;
5. Создание универсальной и эффективной модели внедрения VR-технологий с целью формирования и развития необходимых профессиональных ценностных ориентаций.

Литература

Бажутин А.А., Ихтисанов И.И. Проблемы цифровизации обучения курсантов военных вузов Альманах Пермского военного института войск национальной гвардии. 2024. № 2(14). С. 65–70.

- Бугаевская М.В. Нормативно-правовые основы цифровизации образования // Юрист вуза. 2020. № 10. С. 41–44.
- Булгаков В.В. Иммерсивная форма подготовки: актуальность и перспективы внедрения в образовательный процесс вузов МЧС России // Вестник МГПУ. Серия: Информатика и информатизация образования. 2020. № 4(54). С. 68–78. DOI: 10.25688/2072-9014.2020.54.4.07
- Василенко Я.С. Разработка критериев и показателей готовности будущих учителей информатики к использованию технологии дополненной реальности в образовательном процессе // Человек. Наука. Социум. 2025. № 1(21). С. 177–199.
- Григорьева И.В., Гергоков А.А. Проблемы внедрения и использования технологий виртуальной реальности (VR) и дополненной реальности (AR) в образовательном процессе (обзор литературы) // Russian Journal of Education and Psychology. 2023. Т. 14. № 1-2. С. 19–25.
- Давуд Т., Степанов М.С., Степанов С.Н. Сравнительный анализ технологий дополненной и виртуальной реальности (AR/VR) при использовании в современных образовательных процессах // Методические вопросы преподавания инфокоммуникаций в высшей школе. 2025. Т. 14. № 4. С. 51–56.
- Дронова А.Н. Возможности использования технологии дополненной реальности в образовательном процессе // Информационные технологии в образовательном процессе вуза и школы: материалы XIX Всероссийской научно-практической конференции, Воронеж, 28 марта 2025 года. Воронеж: Воронежский государственный педагогический университет, 2025. С. 52–58.
- Евдокимов И.В., Михалев А.С., Тимофеев Н.А., Батулин Ю.А. Прогнозирование эффективности использования технологий виртуальной реальности в образовательном процессе // Проблемы социально-экономического развития Сибири. 2017. № 3(29). С. 129–135.
- Жалагина Т.А., Виноградов К.С. Мотивация профессиональной деятельности и ценностные ориентации личности как факторы успешности профессиональной деятельности педагога // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Педагогика и психология. 2021. № 2(55). С. 66–75. DOI: 10.26456/vtsped/2021.2.066
- Закарюкина В.А. Деятельностный подход в образовании: "VR-технологии как способ достижения метапредметных результатов" // Мастер-класс. 2020. № 5. С. 2–8.
- Касаткина М.И., Федотенко И.Л. Формирование профессионально-ценностных ориентаций будущих социальных работников как условие развития их готовности к профессиональной деятельности // Человеческий капитал. 2023. № 1(169). С. 220–228. DOI: 10.25629/НС.2023.01.25
- Кравченко Ю.А., Лежебоков А.А., Пащенко С.В. Особенности использования технологии дополненной реальности для поддержки образовательных процессов // Открытое образование. 2014. № 3(104). С. 49–54.
- Ламонина Л.В., Смирнова О.Б. Об использовании цифровых онлайн-технологий в дистанционном обучении // Электронный научно-методический журнал Омского ГАУ. 2020. № 4 (23).
- Пак Н.Ю. Проблемы и перспективы применения технологий виртуальной реальности в образовании // Проблемы Науки. 2025. №7 (206). С.13-16. DOI: 10.24411/2304-2338-2025-10701
- Памирский А.Э., Маслова Е.Н., Жирова Е.А. [и др.]. Виртуальные технологии в образовании: проблемы нормативно-правового регулирования // Профессиональное образование в современном мире. 2023. Т. 13. № 4. С. 724–735. DOI: 10.20913/2618-7515-2023-4-14
- Паскова А.А. Особенности применения иммерсивных технологий виртуальной и дополненной реальности в высшем образовании // Вестник Майкопского государственного технологического университета. 2022. Т. 14. №3. С. 83–92. DOI: 10.47370/2078-1024-2021-13-2-83-92

- Певцова Е.А. Правовое регулирование «цифровизации» образовательных отношений // Народное образование. 2018. № 10. С. 15–20.
- Писаренко В.И. Педагогические модели: типология и особенности // Проблемы современного образования. 2024. № 1. С. 58–76. DOI: 10.31862/2218-8711-2024-1-58-76.
- Пятибрат М.А. Применение виртуальной реальности в учебном процессе военных учебных центров // Тенденции развития науки и образования. 2023. № 98-2. С. 16–20. DOI: 10.18411/trnio-06-2023-64.
- Родионова О.В., Ситникова Л.Д. Использование технологии дополненной реальности в образовательном процессе // Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения: материалы Международной (заочной) научно-практической конференции, Душанбе, 23 ноября 2021 года. Нефтекамск: Научно-издательский центр "Мир науки" (ИП Вострецов Александр Ильич), 2021. С. 116–122.
- Спицын П.А., Бавула А.А. Новый уровень обучения перспективные формы обучения курсантов с использованием средств виртуальной реальности // Вестник военного образования. 2021. № 4(31). С. 99–104.
- Тепляков С.В. Анализ опыта формирования профессиональных ценностных ориентаций у военнослужащих войск национальной гвардии Российской Федерации // Мировые научные исследования и разработки: современные достижения, риски, перспективы: Материалы XIV Международной научно-практической конференции, Ставрополь, 30 октября 2023 года. Ставрополь: Общество с ограниченной ответственностью "Ставропольское издательство "Параграф", 2023. С. 135–139.
- Федоровский В.А., Меламед А.М., Изосимова Т.А. Информационная безопасность при использовании технологии дополненной и виртуальной реальности в обучении // Современные и информационные технологии в социальной сфере: материалы IV Всероссийской технической научно-практической конференции, Чебоксары, 25 апреля 2024 года. Чебоксары: ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», 2024. С. 264–268.
- Фокина Д.А. Перспективы использования технологий виртуальной реальности в образовательном процессе // Глобальная неопределённость. Развитие или деградация мировой экономики? Сборник статей XI Международной научной конференции. В 2-х томах, Москва, 17–18 мая 2022 года / Под редакцией С.Д. Валентя. Том 1. М.: Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, 2022. С. 149–155.
- Чванова М. С., Киселева И. А., Подлесный Д.В. Формирование профессионально-ценностных ориентаций студентов в процессе интернет-социализации в международном профессиональном сообществе // Перспективы науки и образования. 2024. № 6(72). С. 89–107. DOI: 10.32744/pse.2024.6.6
- Швачко Е.В., Калугина Т.А. Средовой подход в методологии педагогического исследования: содержательный и функциональный аспекты // Вестник "Орлеу" - kst. 2017. № 3(17). С. 21–25.
- Шевченко Г. И., Рыбакова А.А., Кочкин Д.А. Особенности организации образовательного процесса в вузе с использованием средств виртуальной реальности // Проблемы современного педагогического образования. 2018. № 60-1. С. 398–402.
- Юсупова-Вельгорская Л.А. Механизм формирования профессионально-ценностных ориентаций студентов в условиях образовательной среды профессиональных образовательных организаций // Вестник профессионального образования. 2023. 1 (19). С. 94–102.
- de Moraes Rossetto A.G. et al. An analysis of the use of augmented reality and virtual reality as educational resources. Computer Applications in Engineering Education, vol. 31, no. 6, pp. 1761-1775, Aug. 2023.

Dinis F.M., Guimarães A.S., Carvalho B.R., Poças Martins J.P. Virtual and augmented reality game-based applications to civil engineering education. 2017 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON), Athens, Greece, 2017, pp. 1683-1688.

Информация об авторах

Тиняков Сергей Владимирович; аспирант кафедры педагогики и профессионального обучения; ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина» (Российская Федерация, 399770, г. Елец, Липецкая область, ул. Коммунаров, д. 28); E-mail: sergey12111994@mail.ru; ORCID: 0009-0009-4190-1845;

Щербатых Людмила Николаевна; кандидат педагогических наук; профессор, кафедры восточных и европейских языков, теории перевода и лингвистики; ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина» (Российская Федерация, 399770, г. Елец, Липецкая область, ул. Коммунаров, д. 28); E-mail: shcherlyd@mail.ru; ORCID: 0000-0003-2151-1101

THE IMPLEMENTATION OF THE VIRTUAL REALITY TECHNOLOGIES INTO THE EDUCATIONAL PROCESS FOR DEVELOPING PROFESSIONAL VALUE ORIENTATIONS OF CADETS

Tinakov S. V.
post-graduate student

Bunin Yelets State University

Shcherbatykh L. N.

Bunin Yelets State University

Ph. D (Pedagogy), Associate Professor

Abstract. This article examines the implementation of the virtual reality technologies to the develop professional value orientations in cadets at the departmental educational institutions. Given the growing threat to state security and sovereignty, training qualified military personnel is a priority for the modern military education. Professional value orientations form the personal foundation of a military specialist's work. The authors list the basic professional value orientations necessary for the successful performance of a military specialist. Their development during of the educational process should occur using all promising educational technologies, one of which is VR. The authors analyzed scientific research on the implementation of VR technologies in the educational process at the departmental educational institution. The article examines the main areas of scientific research in this area. The views of academic researchers on the importance of using virtual reality technologies in the educational process and the challenges of their implementation are examined. The study identified the main obstacles to the implementation of VR technologies in the educational process at departmental educational institutions. The main challenge in implementing VR technologies in the educational process at a departmental educational institution is the conservative nature of the educational environment and the poor digital literacy of teachers. Current pedagogical science lacks research examining the potential of using virtual reality technologies to develop students' professional values. The authors have developed an algorithm for implementing VR technologies in the educational environment of a departmental educational institution to foster and develop the necessary professional values in students. With the high-quality and consistent adherence to all stages of the presented algorithm, the

successful implementation of virtual reality technologies in the educational environment of a departmental educational institution is predicted to foster the students' professional values.

Keywords: departmental educational institutions, cadets, military-pedagogical process, professional value orientations, virtual reality technologies, VR technologies

For citation: Tinakov S. V., Shcherbatykh L. N. (2026). The Implementation of the Virtual Reality Technologies Into the Educational Process for Developing Professional Value Orientations of Cadets. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2 (42), 146–159. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-146-159

Copyright: © S. V. Tinakov, L. N. Shcherbatykh (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Bazhutin, A. A. Ikhtisanov, I. I. (2020). Problemy tsifrovizatsii obucheniya kursantov voyennykh vuzov. *Almanakh Permskogo voyennogo instituta voysk natsionalnoy gvardii*, 2(14), 65-70. (In Russ).
- Bugaevskaya, M. V. (2020). The regulatory Framework for the Digitalization of Education. *University Lawyer*, 10, 41-44. (In Russ., abstract in Eng.)
- Bulgakov, V. V. (2020). Immersivnaya forma podgotovki: aktualnost i perspektivy vnedreniya v obrazovatelnyy protsess vuzov *MChS Rossii. Vestnik MGPU. Seriya: Informatika i informatizatsiya obrazovaniya*, 4(54), 68-78. DOI: 10.25688/2072-9014.2020.54.4.07 (In Russ).
- Chvanova, M. S. (2024). The Formation of the Students' Professional and Value Orientations in the Process of Online Socialization in the International Professional Community. *The Prospects of Science and Education*, 6(72), 89-107. DOI: 10.32744/pse.2024.6.6. (In Russ., abstract in Eng.).
- Davud, T. (2025). The comparative analysis of augmented and virtual reality (AR / VR) technologies when used in modern educational processes. *Methodological issues of teaching infocommunications in higher education*, 14(4), 51-56. (In Russ., abstract in Eng.)
- De Moraes Rossetto, A. G. et al. (2023). An Analysis of the Use of Augmented Reality and Virtual Reality as Educational Resources. *The Computer Applications in Engineering Education*, 31 (6), 1761-1775.
- Dinis, F. M., Guimarães, A. S., Carvalho, B. R., Poças Martins, J. P. (2017). The Virtual and augmented reality game-based applications to the civil engineering education. 2017 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON), Athens, Greece, 1683-1688.
- Dronova, A. N. (2025). Possibilities of Using the Augmented Reality Technology in the Educational Process *Information Technologies in the Educational Process of Universities and Schools: Proceedings of the XIX All-Russian Scientific and Practical Conference, Voronezh, March 28, Voronezh: Voronezh State Pedagogical University*, 52-58. (In Russ.).
- Fedorovsky, V. A. (2024). Informacionnaya bezopasnost' pri ispol'zovanii texnologii dopolnennoj i virtual'noj real'nosti v obuchenii. *Sovremennyye i informacionnyye texnologii v social'noj sfere: materialy IV Vserossijskoj texnicheskoy nauchno-prakticheskoy konferencii, Cheboksary, 25 aprelya 2024 goda. Cheboksary*: FGBOU VO «Moskovskij avtomobil'no-dorozhnyj gosudarstvennyj texnicheskij universitet (MADI)», 264-268. (In Russ).
- Fokina, D. A. (2022). Perspektivy ispol'zovaniya texnologij virtual'noj real'nosti v obrazovatel'nom processe. *Global'naya neopredelyonnost'. Razvitie ili degradaciya mirovoj e'konomiki? Sbornik statej XI Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii. V 2-x tomah, Moskva*,

- 17–18 maya 2022 goda/ Pod redakciej S.D. Valenteya. Tom 1. M.: Rossijskij e`konomicheskij universitet imeni G.V. Plexanova, 149-155. (In Russ).
- Evdokimov, I. V. (2017). Prognozirovaniye effektivnosti ispolzovaniya tekhnologiy virtualnoy realnosti v obrazovatelnom protsesse. *Problemy` social`no-e`konomicheskogo razvitiya Sibiri*, 3(29), 129-135. (In Russ.).
- Grigorieva, I. V. (2023). The problems of implementation and use of virtual reality (VR) and augmented reality (AR) technologies in the educational process (literature review). *Russian Journal of Education and Psychology*, 14(1-2), 19-25. (In Russ., abstract in Eng.)
- Kasatkina, M. I. (2023). Formation of professional and value orientations of future social workers as a condition for developing their readiness for professional activity. *Human capital*, 1(169), 220-228. DOI: 10.25629/HC.2023.01.25 (In Russ., abstract in Eng.)
- Kravchenko, Yu. A. (2014). The features of Using Augmented Reality Technology to Support Educational Processes. *Open Education*, 3(104), 49-54. (In Russ.).
- Lamonina, L. V., Smirnova, O. B. (2020). On the Use of the digital Online Technologies in Distance Learning. *Electronic Scientific and Methodological Journal of Omsk State Agrarian University*, 4 (23). (In Russ., abstract in Eng.).
- Pak, N. Yu. (2025). Problemy` i perspektivy` primeneniya texnologij virtual`noj real`nosti v obrazovanii. *Problemy` Nauki*, 7 (206). DOI: 10.24411/2304-2338-2025-10701. (In Russ.).
- Pamirsky, E. N. (2023). The virtual Technologies in Education: problems of the Legal Regulation. *Professional Education in the Modern World*, 13(4), 724-735. (In Russ., abstract in Eng.).
- Paskova, A. A. (2022). The features of the Application of the Immersive Technologies of Virtual and Augmented Reality in Higher Education. *Bulletin of the Maikop State Technological University*, 14(3), 83-92. DOI: 10.47370/2078-1024-2021-13-2-83-92 (In Russ., abstract in Eng.).
- Pevtsova, E. A. (2018). Pravovoe regulirovanie «cifrovizacii» obrazovatel`ny`x otnoshenij. *Narodnoe obrazovanie*, 10, 15-20. (In Russ.).
- Pisarenko, V. I. (2018). Pedagogical Models: Typology and Features. *Problems of Modern Education*, 1, 58-76. DOI: 10.31862/2218-8711-2024-1-58-76. (In Russ., abstract in Eng.).
- Pyatibrat, M. A. (2023). The application of the Virtual Reality in the Educational Process of Military Training Centers. *The trends in the Development of the Science and Education*, 98(2), 16-20. DOI: 10.18411/trnio-06-2023-64. (In Russ., abstract in Eng.).
- Rodionova, O. V. (2021). Ispol`zovanie texnologii dopolnenoj real`nosti v obrazovatel`nom processe. *Sovremennaya nauka: aktual`ny`e problemy` i puti ix resheniya: materialy` Mezhdunarodnoj (zaochnoj) nauchno-prakticheskoy konferencii*, Dushanbe, 23 noyabrya 2021 goda. Neftekamsk: Nauchno-izdatel`skij centr Mir nauki (IP Vostreczov Aleksandr Il`ich), 116-122. (In Russ.).
- Spitsyn, P. A. (2021). Novy`j uroven` obucheniya perspektivny`e formy` obucheniya kursantov s ispol`zovaniem sredstv virtual`noj real`nosti. *Vestnik voennogo obrazovaniya*, 4(31), 99-104. (In Russ.).
- Teplyakov, S. V. (2023). Analiz opy`ta formirovaniya professional`ny`x cennostny`x orientacij u voennosluzhashhix vojsk nacional`noj gvardii Rossijskoj Federacii. *Mirovy`e nauchny`e issledovaniya i razrabotki: sovremenny`e dostizheniya, riski, perspektivy`*: Materialy` XIV Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii, Stavropol`, 30 oktyabrya 2023 goda. Stavropol`: Obshhestvo s ogranichennoj otvetstvennost`yu Stavropol`skoe izdatel`stvo Paragraf, 135-139. (In Russ.).
- Shevchenko, G. I. (2018). The Features of the Organization of the Educational Process at a University Using Virtual Reality Tools. *Problems of Modern Pedagogical Education*, 60(1), 398-402. (In Russ., abstract in Eng.).
- Shvachko, E. V. (2017). Sredovoj podxod v metodologii pedagogicheskogo issledovaniya: sodержatel`ny`j i funkcional`ny`j aspekty. *Vestnik Ørleu*, 3(17), 21-25. (In Russ.).

- Vasilenko, Ya. S. (2025). The development of criteria and indicators of the future computer science teachers' readiness to use augmented reality technology in the educational process. *Man. Science. Society*, 1 (21), 177-199. (In Russ).
- Yusupova-Velgorskaya, L. A. (2023) The Mechanism for the Formation of the Students' Professional-Value Orientations in the Educational Environment of Professional Educational Organizations. *Bulletin of Professional Education*.
- Zakarjukina, V. A. (2020). The activity-based approach in education: "VR technologies as a way to achieve meta-subject results". *Master class*, 5, 2-8. (In Russ).
- Zhalagina, T. A. (2021). Motivaciya professional'noj deyatel'nosti i cennostny'e orientacii lichnosti kak faktory' uspeshnosti professional'noj deyatel'nosti pedagoga. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika i psixologiya*, 2 (55), 66-75. DOI: 10.26456/vtspyped/2021.2.066 (In Russ).

Information about the authors

Tinyakov Sergey Vladimirovich, post-graduate student, Department of Pedagogy and Professional Training; Yelets State University (Russian Federation, 399770, Bunin Yelets, Lipetsk Region, Kommunarov Street, 28); E-mail: sergey12111994@mail.ru; ORCID: 0009-0009-4190-1845.

Shcherbatykh Lyudmila Nikolaevna; Candidate of Pedagogical Sciences; Professor, the Department of Oriental and European Languages the theory of translation and linguodidactic; Bunin Yelets State University (Russian Federation, 399770, Yelets, Lipetsk Region, Kommunarov Street, 28); E-mail: shcherlyd@mail.ru; ORCID: 0000-0003-2151-1101

Статья поступила в редакцию	03.02.2026
Принята к публикации	25.03.2026
Статья опубликована	19.06.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-2-160-167

УДК
378.016:004.8

**МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ В ПОДГОТОВКЕ
БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ
ПРЕДМЕТОВ К ПРИМЕНЕНИЮ ИСКУССТВЕННОГО
ИНТЕЛЛЕКТА В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ**

Щербатых Сергей Викторович
д.п.н., профессор
Шемонаева Ирина Игоревна
аспирант

Елецкий государственный университет им.
И. А. Бунина
Елецкий государственный университет им.
И. А. Бунина

Аннотация. Статья посвящена актуальной проблеме подготовки будущих учителей естественно-научных предметов к эффективному применению технологий искусственного интеллекта (ИИ) в образовательном процессе. В условиях стремительной цифровой трансформации образования возникает острая необходимость в пересмотре традиционных подходов к профессиональной подготовке педагогических кадров. Предложен вариативный модуль учебной программы подготовки, объединяющий компетентностный, деятельностный, системный и исследовательский подходы. Описаны ключевые компетенции, структурно-функциональные блоки учебной программы, методы обучения и оценивания, а также рекомендации по реализации в условиях вуза и школы. Обоснованы принципы этического и критического сопровождения внедрения ИИ в естественно-научное образование.

Ключевые слова: искусственный интеллект, подготовка учителя, естественно-научные предметы, цифровая трансформация, профессиональное образование, методология, педагогические технологии, компетенции

Для цитирования: Щербатых С.В., Шемонаева И.И. Методологические подходы в подготовке будущего учителя естественно-научных предметов к применению искусственного интеллекта в образовательном процессе // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 2 (42). С. 160–167. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-160-167

Права: © С.В. Щербатых, И.И. Шемонаева (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Современное общество переживает период беспрецедентных изменений, обусловленных стремительным развитием цифровых технологий, и в особенности – искусственного интеллекта (ИИ). ИИ проникает во все сферы человеческой деятельности, включая образование, трансформируя его методологию, содержание и технологии. В эпоху цифровой трансформации перед системой профессионального педагогического образования стоит задача не просто адаптироваться к новым реалиям, но и активно формировать у будущих учителей компетенции, позволяющие им эффективно интегрировать ИИ в учебный процесс. Особую актуальность эта проблема приобретает для учителей естественно-научных предметов (физики, химии, биологии), где ИИ открывает уникальные возможности для моделирования

сложных процессов, анализа больших данных, проведения виртуальных экспериментов и персонализации обучения.

Традиционные подходы к подготовке учителя, ориентированные преимущественно на предметные знания и классические методики (Хуторской, 2003), оказываются недостаточными в условиях, когда ИИ становится не просто инструментом, а полноценным участником образовательной экосистемы (Блинов, 2021). Возникает необходимость в разработке научно обоснованных методологических подходов и практико-ориентированных технологических решений, которые позволят будущим педагогам не только освоить инструментарий ИИ, но и развить критическое мышление, этическую ответственность и педагогическую креативность в работе с ним.

Методология исследования

Актуальность данного исследования обусловлена несколькими факторами:

1. Глобальная цифровая трансформация.

ИИ меняет рынок труда и требования к выпускникам школ, что диктует необходимость подготовки учителей, способных обучать в соответствии с этими изменениями.

2. Потенциал ИИ в естественно-научном образовании.

Естественные науки оперируют сложными моделями, требуют проведения экспериментов и анализа данных. ИИ может значительно расширить дидактические возможности в этих областях, предоставляя инструменты для симуляций, виртуальных лабораторий, адаптивного обучения и анализа поведения учащихся.

3. Недостаточная готовность педагогических кадров.

Существующие программы подготовки учителей зачастую не в полной мере учитывают необходимость формирования компетенций по работе с ИИ, что создаёт разрыв между требованиями времени и уровнем подготовки выпускников педагогических вузов.

4. Методологические вызовы.

Интеграция ИИ требует не просто освоения новых программ, но и переосмысления педагогических парадигм, разработки новых методик преподавания и оценки результатов обучения (Роберт, 2014).

Цель статьи – сформулировать и обосновать методологические подходы, обеспечивающие формирование у будущих учителей компетенций для осмысленного, безопасного и эффективного применения ИИ в преподавании естественных наук.

В контексте цифровой трансформации образования роль учителя претерпевает существенные изменения. Из транслятора знаний он превращается в фасилитатора, наставника, дизайнера образовательной среды, способного использовать ИИ для достижения индивидуальных образовательных целей учащихся. Это требует от педагога не только глубоких предметных знаний, но и развитой цифровой, а главное – ИИ-грамотности.

Под ИИ-грамотностью учителя понимается совокупность знаний, умений и навыков, позволяющих ему:

- 1) понимать базовые принципы работы ИИ и его возможности в образовании;
- 2) выбирать и эффективно применять ИИ-инструменты для решения педагогических задач;
- 3) критически оценивать результаты работы ИИ и его влияние на процесс обучения;
- 4) разрабатывать учебные материалы и сценарии уроков с использованием ИИ;
- 5) обеспечивать этическое и безопасное использование ИИ в образовательной среде;
- 6) развивать у учащихся навыки работы с ИИ и критического мышления в отношении цифровых технологий (Григорьев, 2024).

Проблема подготовки учителя к применению ИИ в естественно-научных предметах имеет свою специфику. Естественные науки традиционно основываются на наблюдении, эксперименте, анализе и синтезе. ИИ может значительно усилить эти аспекты:

МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

1. Физика: моделирование сложных физических процессов, анализ экспериментальных данных, создание интерактивных симуляций.

2. Химия: предсказание свойств веществ, моделирование химических реакций, виртуальные лаборатории с анализом результатов.

3. Биология: анализ генетических данных, моделирование экосистем, распознавание образов (например, микроорганизмов), персонализированные тренажёры по анатомии.

Однако без должной подготовки учитель может столкнуться с трудностями в интеграции этих инструментов, их дидактически грамотном применении и оценке их эффективности (Baker, 2014).

Эффективная подготовка будущего учителя к применению ИИ требует комплексного методологического подхода, включающего следующие направления:

1. Компетентностный подход.

В основе подготовки лежит формирование специфического набора компетенций. Помимо предметных и психолого-педагогических, необходимо выделить:

1. Цифровая компетентность: уверенное владение цифровыми инструментами, понимание основ кибербезопасности.

2. ИИ-педагогическая компетентность: знание дидактического потенциала ИИ, умение проектировать учебный процесс с его использованием, способность к адаптивному управлению обучением.

3. Критическое мышление и этическая ответственность: умение оценивать надёжность ИИ-систем, понимать их ограничения, осознавать этические аспекты использования данных и алгоритмов.

4. Исследовательская компетентность: способность к поиску, анализу и оценке новых ИИ-инструментов, а также к проведению мини-исследований по их эффективности в учебном процессе.

2. Деятельностный подход.

Обучение должно быть максимально практико-ориентированным. Будущие учителя не просто изучают ИИ, но и активно используют его в процессе самообучения, разрабатывают проекты с его применением, проводят «пилотные» уроки в условиях, приближенных к реальным. Это включает:

1. Проектное обучение: разработка проектов, связанных с использованием ИИ, для школьников по естественно-научным дисциплинам.

2. Кейс-study: анализ реальных педагогических ситуаций, где ИИ может быть применён или уже применяется.

3. Моделирование и симуляции: использование ИИ-инструментов для создания учебных моделей и симуляций.

3. Системный подход.

Подготовка должна быть интегрирована в общую систему профессионального образования, а не являться отдельным «курсом по ИИ». Это означает:

1. Междисциплинарность: включение элементов ИИ-образования в различные дисциплины учебного плана (педагогика, психология, предметные методики, информатика).

2. Непрерывность: создание условий для постоянного профессионального развития учителя в области ИИ после окончания вуза.

4. Интегративный подход.

Объединение педагогических, технологических и предметных знаний. Учитель должен понимать, как ИИ-инструмент работает, как он может быть применён в конкретной естественно-научной области и какие педагогические цели он позволяет достичь.

Предлагаемый набор компетенций включает пять взаимосвязанных блоков:

1. Предметно-методическая компетентность – глубокое понимание содержания естественно-научных дисциплин; умение трансформировать учебные задачи в форматы, пригодные для ИИ-поддержки.

2. Технологическая и цифровая компетентность – владение инструментами обработки данных, базовыми принципами ML, навыками работы с виртуальными лабораториями, интерактивными симуляторами, ИТС.

3. ИИ-педагогическая компетентность (AI-TPACK) – умение проектировать учебные сценарии с ИИ, выбирать подходящие инструменты и задания, оценивать учебный эффект.

4. Исследовательская и аналитическая компетентность – проведение педагогического эксперимента, интерпретация learning analytics, использование данных для коррекции учебного процесса.

5. Этическая и правовая компетентность – понимание вопросов приватности, предвзятости алгоритмов, ответственности при использовании ИИ в образовании.

Каждая компетенция имеет операциональные показатели (что умеет делать выпускник), например, «составлять адаптивный учебный маршрут с использованием ИТС» или «анализировать результаты виртуального эксперимента и формировать рекомендации для учащихся».

Применение ИИ в естественно-научном образовании открывает широкий спектр дидактических возможностей, которые будущий учитель должен уметь использовать (Ролл, 2016):

1. Интеллектуальные обучающие системы (ИТС) и адаптивное обучение.

1) Возможности: персонализация образовательного маршрута, адаптация сложности заданий под уровень ученика, автоматическая диагностика пробелов в знаниях, предоставление мгновенной обратной связи.

2) Пример в ЕНП (естественно-научных предметах): ИТС, которая адаптирует задачи по решению физических задач, подбирает экспериментальные работы по химии в зависимости от успеваемости, или предлагает дополнительные материалы по биологии для углубленного изучения.

2. Виртуальные лаборатории и симуляторы с элементами ИИ.

1) Возможности: проведение опасных, дорогостоящих или труднодоступных экспериментов в безопасной виртуальной среде, моделирование сложных природных явлений, возможность многократного повторения и изменения параметров.

2) Пример в ЕНП: виртуальная химическая лаборатория, где ИИ анализирует действия ученика, предупреждает об ошибках и предлагает оптимальные пути решения. Физические симуляции, где ИИ помогает визуализировать невидимые процессы (например, движение частиц).

3. Автоматизированная оценка и обратная связь.

1) Возможности: быстрая проверка тестовых заданий, эссе, решение задач, анализ открытых ответов, выявление типичных ошибок и предоставление персонализированных рекомендаций.

2) Пример в ЕНП: ИИ-системы, проверяющие лабораторные отчёты, анализирующие графики и данные экспериментов, дающие рекомендации по улучшению формулировок или точности измерений.

4. Анализ данных об обучении (Learning Analytics) на основе ИИ.

1) Возможности: сбор и анализ больших объёмов данных о поведении учащихся (время выполнения заданий, частота ошибок, используемые ресурсы), выявление закономерностей, прогнозирование успеваемости, идентификация групп риска.

2) Пример в ЕНП: учитель может использовать ИИ для анализа, какие темы по биологии вызывают наибольшие затруднения у класса, или какие типы физических задач решаются медленнее всего, чтобы скорректировать методику преподавания.

5. Инструменты для генерации контента и персонализации:

1) Возможности: создание уникальных задач, упражнений, текстов, иллюстраций, адаптированных под индивидуальные потребности и интересы учащихся.

МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

2) Пример в ЕНП: ИИ-генераторы, создающие задачи по химии с разными исходными данными, или тексты по биологии, адаптированные для разных уровней сложности.

Результаты

На основе вышеизложенных методологических подходов и компетенций, предлагается следующая структура учебной программы (вариативный модуль) подготовки будущего учителя естественно-научных предметов, которая представлена на рис. 1.

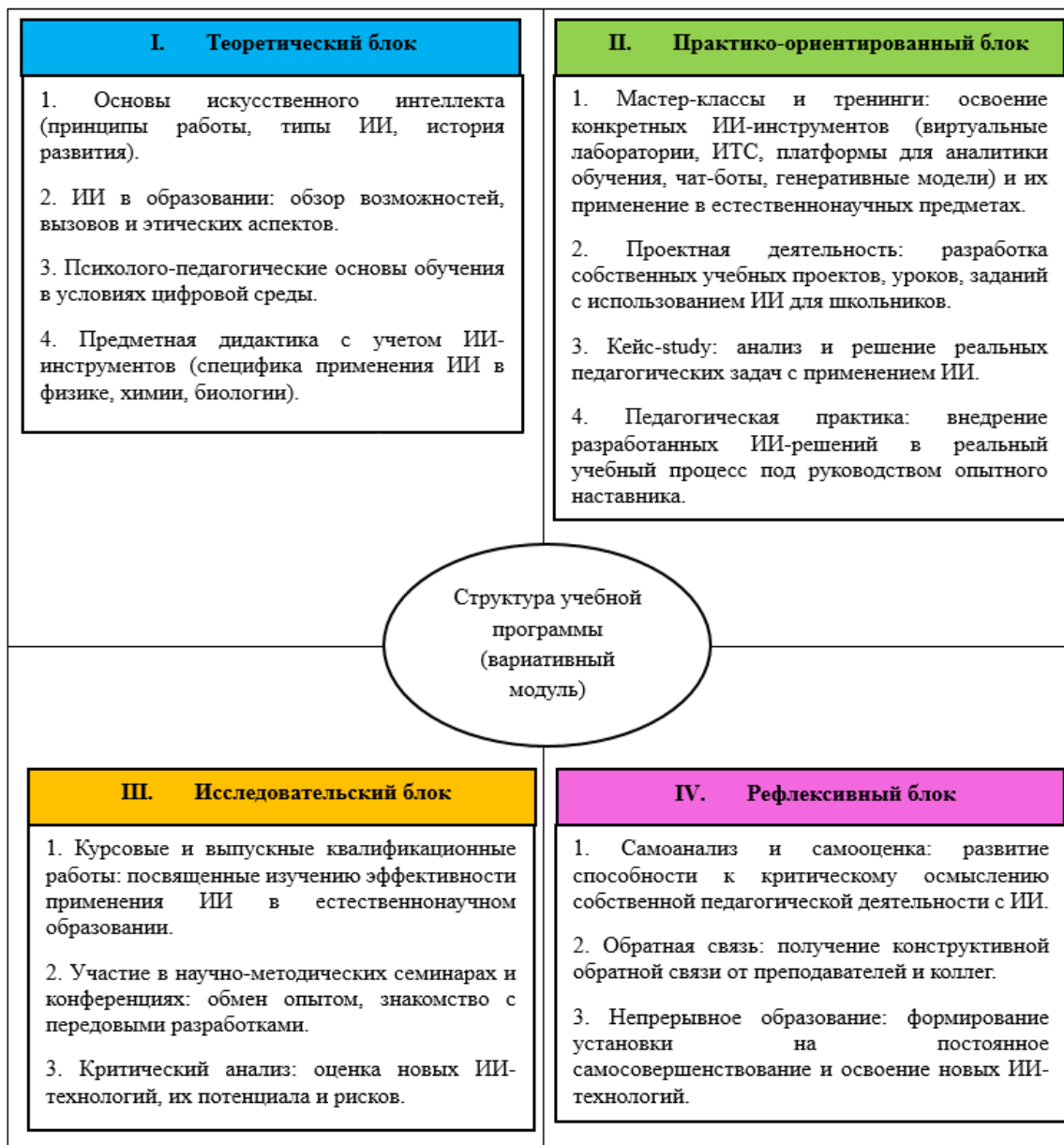


Рис. 1. Структура учебной программы (вариативный модуль)

Реализация предложенной модели сталкивается с рядом вызовов:

1. Кадровое обеспечение: недостаток преподавателей вузов, обладающих глубокими знаниями в области ИИ и педагогики.
2. Материально-техническая база: необходимость оснащения учебных заведений современными ИИ-инструментами и платформами.
3. Разработка учебных программ: требуется создание новых или адаптация существующих учебных планов и методических материалов.

4. Этические вопросы: необходимость формирования у студентов чёткого понимания этических границ и рисков использования ИИ (предвзятость алгоритмов, конфиденциальность данных).

Однако перспективы, открываемые подготовкой учителя к применению ИИ, значительно перевешивают вызовы (Немытых, 2023). Это:

1. Повышение качества естественно-научного образования.
2. Развитие у школьников навыков XXI века (критическое мышление, решение проблем, цифровая грамотность).
3. Персонализация обучения и повышение мотивации учащихся.
4. Автоматизация рутинных задач учителя, позволяющая ему сосредоточиться на творческой и индивидуальной работе с учениками.

Заключение

Цифровая трансформация образования, движимая технологиями искусственного интеллекта, ставит перед системой профессионального педагогического образования новые, амбициозные задачи. Подготовка будущего учителя естественно-научных предметов к эффективному применению ИИ является не просто желательной, а жизненно необходимой для формирования конкурентоспособного специалиста и развития научного потенциала общества.

Предложенные методологические подходы (компетентностный, деятельностный, системный, интегративный) и модель подготовки, включающая теоретический, практико-ориентированный, исследовательский и рефлексивный блоки, призваны обеспечить формирование у будущих педагогов глубоких знаний, практических навыков и критического осмысления потенциала ИИ. Только такой комплексный подход позволит учителю стать не просто пользователем, а активным архитектором образовательной среды будущего, где ИИ будет служить мощным инструментом для раскрытия потенциала каждого ученика в изучении удивительного мира естественных наук. Дальнейшие исследования могут быть направлены на апробацию предложенной модели и оценку её эффективности в реальных условиях педагогических вузов.

Список литературы

- Блинов В.И., Есенина Е.Ю., Сергеев И.С. Модели смешанного обучения: организационно-дидактическая типология // Высшее образование в России. 2021. Т. 30. № 5. С. 44–64. DOI: 10.31992/0869-3617-2021-30-5-44-64
- Григорьев С.Г., Аникьева М.А. Повышение эффективности применения технологий генеративного искусственного интеллекта в образовательной деятельности // Информатика и образование. 2024. Т. 39. № 3. С. 5–15. DOI: 10.32517/0234-0453-2024-39-3-5-15.
- Немытых С.Л., Дьячкова А.В. Искусственный интеллект в образовании: вызовы, возможности, перспективы // Российские регионы в фокусе перемен: сборник докладов XVIII Международной конференции. Екатеринбург, 16–18 ноября 2023 г. Екатеринбург: Издательство Издательский Дом «Ажур», 2023. С. 433–435.
- Роберт И.В. Теория и методика информатизации образования: психолого-педагогический и технологический аспекты. М.: Бином. Лаб. знаний, 2014.
- Ролл И., Уайли Р. Эволюция и революция в искусственном интеллекте в образовании. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*. 2016. 26. С. 582–599. DOI: 10.1007/s40593-016-0110-3
- Хуторской А.В. Дидактическая эвристика. Теория и технология креативного обучения. М.: Изд-во МГУ, 2003.
- Baker R.S., Siemens G. Educational Data Mining and Learning Analytics. *Handbook of Learning Analytics*. 2014. P. 253–272.

Информация об авторах

Щербатых Сергей Викторович; доктор педагогических наук; профессор; ректор; профессор кафедры математики, информатики, физики и методики обучения; ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина» (Российская Федерация, 399770, г. Елец, Липецкая область, ул. Коммунаров, д. 28); E-mail: shcherserg@mail.ru; ORCID: 0000-0002-4870-8257;

Шемонаева Ирина Игоревна; ассистент кафедры математики, информатики, физики и методики обучения; аспирант института психологии и педагогики; ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина» (Российская Федерация, 399770, г. Елец, Липецкая область, ул. Коммунаров, д. 28); E-mail: shemonaeva.irin@yandex.ru; ORCID: 0009-0008-0595-8353

METHODOLOGICAL APPROACHES IN PREPARING FUTURE NATURAL SCIENCE TEACHERS TO USE ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN THE EDUCATIONAL PROCESS

Shcherbatykh S. V. Dr. Sci. (Pedagogy), Professor	Bunin Yelets State University
Shemonaeva I. I. post-graduate student	Bunin Yelets State University

Abstract. This article addresses the pressing issue of preparing future science teachers for the effective use of artificial intelligence (AI) technologies in the educational process. Amid the rapid digital transformation of education, there is an urgent need to revise traditional approaches to the professional training of teachers. A variable module of the training curriculum is proposed, combining competency-based, activity-based, systemic, and research-based approaches. Key competencies, structural and functional blocks of the curriculum, teaching and assessment methods, and recommendations for implementation in university and school settings are described. Principles for ethical and critical support for the implementation of AI in science education are substantiated.

Keywords: artificial intelligence, teacher training, natural sciences, digital transformation, vocational education, methodology, pedagogical technologies, competencies

For citation: Shcherbatykh S. V., Shemonaeva I. I. (2026). Methodological Approaches in Preparing Future Natural Science Teachers to Use Artificial Intelligence in the Educational Process. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2 (42), 160–167. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-160-167

Copyright: © S. V. Shcherbatykh, I. I. Shemonaeva (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Baker, R. S., Siemens, G. (2014). Educational Data Mining and Learning Analytics. *Handbook of Learning Analytics*, 253-272.
- Blinov, V. I., Esenina, E. Yu., Sergeev, I. S. (2021). Modeli smeshannogo obucheniya: organizacionno-didakticheskaya tipologiya. *Vy'sshee obrazovanie v Rossii*, 8-9, 45-56. (In Russ.)
- Grigoriev, S. G., Anikieva, M. A. (2024). Generative artificial intelligence application enhancement in educational activities. *Informatics and education*, 39(3), 5-15. DOI: 10.32517/0234-0453-2024-39-3-5-15. (In Russ.)
- Khutorskoy, A.V. (2003). *Didakticheskaya e`vrstika. Teoriya i texnologiya kreativnogo obucheniya*. M.: Izd-vo MGU. (In Russ.)
- Nemytyh, S. L. D'yachkova, A. V. (2023). Iskusstvennyj intellekt v obrazovanii: vyzovy, vozmozhnosti, perspektivy [Artificial Intelligence in Education: Challenges, Opportunities, and Prospects]. *Rossijskie regiony v fokuse peremen: sbornik dokladov XVIII Mezhdunarodnoj konferencii* (pp. 433-435). Ekaterinburg: Izdatel'stvo Izdatel'skij Dom «Azhur». (In Russ.)
- Robert, I. V. (2014). *Teoriya i metodika informatizacii obrazovaniya (psixologo-pedagogicheskij aspekt)*. M.: IIO RAO. (In Russ.)
- Roll, I., Wylie, R. (2016). Applications of Artificial Intelligence in Education. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 26(2), 561-591. DOI: 10.1007/s40593-016-0110-3

Information about the authors

Sergey V. Shcherbatykh; Doctor of Pedagogical Sciences; Professor; Rector; Professor of the Department of Mathematics, Computer Science, Physics, and Teaching Methods; Bunin Yelets State University (Kommunarov Street, 28, Yelets, Lipetsk Region, 399770, Russian Federation); E-mail: shcherserg@mail.ru; ORCID: 0000-0002-4870-8257;

Irina I. Shemonaeva; Assistant of the Department of Mathematics, Computer Science, Physics, and Teaching Methods; Post-graduate Student at the Institute of Psychology and Pedagogy; Bunin Yelets State University (Kommunarov Street, 28, Yelets, Lipetsk Region, 399770, Russian Federation); E-mail: shemonaeva.irin@yandex.ru; ORCID: 0009-0008-0595-8353

Статья поступила в редакцию	15.02.2026
Принята к публикации	25.03.2026
Статья опубликована	19.06.2026

Научный журнал
CONTINUUM
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.
ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск № 2(42) / 2026

Корректор – С.Е. Гридчина
Редактор – Н.П. Безногих
Компьютерная верстка – Р.А. Мельников
Техническое исполнение – В.М. Гришин

Подписано в печать 18.06.2026
Дата выхода в свет 19.06.2026

Бумага формат А-4 (84,0 п.л.).
Гарнитура Times. Печать трафаретная
Тираж 1000 экз. Заказ №26
Свободная цена

Адрес редакции:
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28
E-mail: secretary@continuum-journal.ru
Сайт редколлегии: <https://continuum-journal.ru>

Подписной индекс журнала **№64987** в каталоге
«Пресса России»

Отпечатано с готового оригинал-макета
на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28, 1

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, Липецкая область, г. Елец, Коммунаров, 28, 1